

# Fiche de révision 7

## Fonctions de deux variables

### 1 Compétences et notions à maîtriser

- ▷ C1 : Déterminer le domaine de définition d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , sa représentation graphique dans l'espace
- ▷ C2 : Maîtriser la notion *intuitive* de fonction de plusieurs variables de classe  $\mathcal{C}^1$ , opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$
- ▷ C3 : Calculer les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables
- ▷ C4 : Manipuler une surface représentative, un plan tangent, des lignes de niveau
- ▷ C5 : Déterminer la dérivabilité et la dérivée d'une fonction composée de la forme  $t \mapsto f(x(t), y(t))$
- ▷ C6 : Déterminer un gradient et connaître lien avec la notion d'extremum
- ▷ C7 : Déterminer des dérivées partielles d'ordre deux, utiliser le théorème de symétrie de Schwartz
- ▷ C8 : Résoudre une équation aux dérivées partielles à plusieurs variables

### 2 Rappels de cours

#### 2.1 Définition et calcul des dérivées partielles

Une **fonction de deux variables** est une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{cases}$$

définie sur un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Le **domaine de définition**  $\mathcal{D}_f$  de  $f$  est l'ensemble de tous les couples de nombres réels  $(x, y)$  tels que  $f(x, y)$  ait un sens.

Les **fonctions partielles** associées sont :

$$f_x : \begin{cases} \mathcal{D}_x & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, y) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_y : \begin{cases} \mathcal{D}_y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x, y) \end{cases}$$

Soit  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

- On appelle **première dérivée partielle** de  $f$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , la fonction obtenue en dérivant  $f$  par rapport à  $x$  (et en supposant  $y$  constant), c'est-à-dire en dérivant la fonction partielle  $f_x$ .
- On appelle **deuxième dérivée partielle** de  $f$ , notée  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , la fonction obtenue en dérivant  $f$  par rapport à  $y$  (et en supposant  $x$  constant), c'est-à-dire en dérivant la fonction partielle  $f_y$ .

**Théorème 2.1.1** Soient  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D}$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $x, y : I \longrightarrow \mathbb{R}$  des fonctions. On suppose que :

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$ ;
- $x$  et  $y$  sont dérivables sur  $I$ ;
- $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in \mathcal{D}$ .

Alors la fonction (d'une seule variable)  $g : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x(t), y(t)) \end{cases}$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)$$

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{D}$  si les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$ .

Dans ce cas, on appelle dérivées partielles d'ordre deux les quatre fonctions  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  définies par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

**Théorème 2.1.2 (Théorème de symétrie de Schwartz)** Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathcal{D}$ , alors on a l'égalité suivante (sur  $\mathcal{D}$ ) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

## 2.2 Lignes et courbes de niveau

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on représente graphiquement une fonction de deux variables  $f$  par une **surface**. Dans l'espace, on représente les points de coordonnées  $(x, y, f(x, y))$  où  $(x, y)$  appartient au domaine de définition de  $f$ .

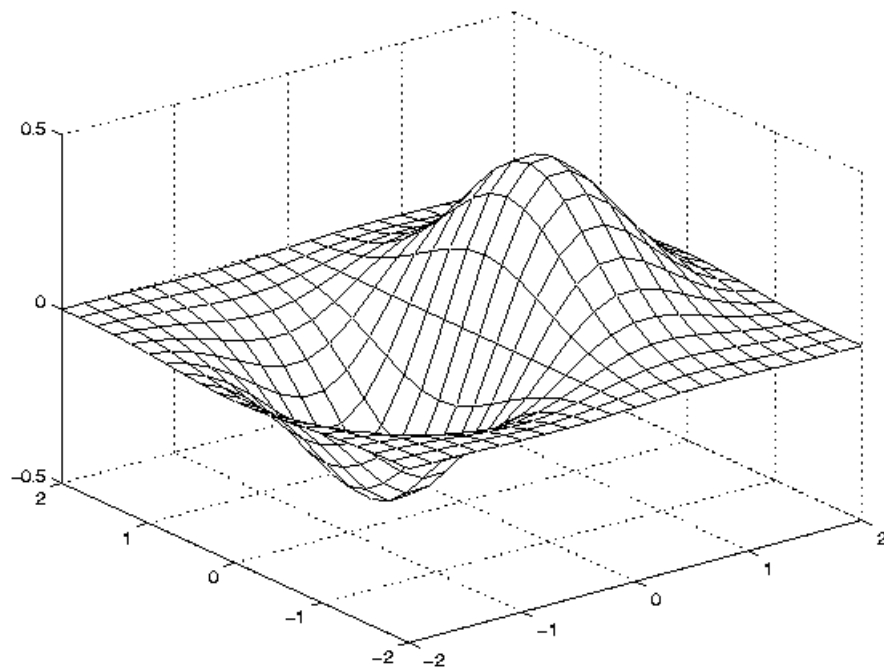


Figure 1- Représentation graphique de la surface d'équation  $z = \frac{y}{1+x^2+y^2}$

Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

Le **plan tangent** à la surface représentative de  $f$  en  $(a, b) \in \mathcal{D}$  a pour équation :

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \times (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \times (y - b).$$

Soit  $k \in \mathbb{R}$ . La **ligne de niveau**  $k$  de la surface représentative (d'équation  $z = f(x, y)$ ) d'une fonction de deux variables  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est l'intersection de la surface avec le plan d'équation  $z = k$ . Il s'agit donc de l'ensemble :

$$\mathcal{L}_k = \{(x, y) \in \mathcal{D} \mid f(x, y) = k\}$$

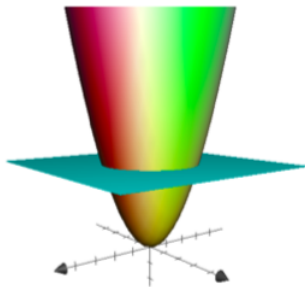


Figure 2 - Représentation graphique de la surface d'équation  $z = x^2 + y^2$  et de l'une de ses courbes de niveau

## 2.3 Gradient et recherche d'extremum

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ . On appelle gradient de  $f$  la fonction suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) : \begin{cases} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \end{cases}$$

**Théorème 2.3.1** Soit  $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Si  $f$  présente un **extremum** au point  $(x_0, y_0)$ , alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f)(x_0, y_0) = (0, 0).$$

*Attention* : la réciproque est fausse.

*Remarques* :

- un tel point  $(x_0, y_0)$  où le gradient de  $f$  s'annule s'appelle un **point critique** de  $f$ .
- pour chercher les extrema d'une fonction, on commence par chercher les points d'annulation du gradient. Il faut ensuite vérifier si les points obtenus sont réellement des extrema pour la fonction  $f$ .

### 3 Exercices

#### Exercice 1 (C1-C2-C3-C7)

1. Pour chacune des fonctions  $f$  d'expressions suivantes :

- préciser le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  et le représenter dans le plan (sauf pour la question (d)) ;
- calculer, aux points où elles existent, les dérivées partielles.

- (a)  $f(x, y) = y^5 - 3xy$  (d)  $f(x, y, z) = x^2 e^z + xy^2 - e^{-xz} z$   
 (b)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  (e)  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{x-y}\right)$   
 (c)  $f(x, y) = x^y$  (f)  $f(x, y) = (x^2 + 1)e^{-x^2 y}$

2. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions  $f$  des questions 1.(a) et 1.(c) aux points où elles existent. Que remarque-t-on ? Cette observation est-elle surprenante ?

#### Exercice 2 (C1-C2-C3-C4-C8)

On note  $n(x, t)$  la densité linéaire de particules (en mole par mètre) à l'instant  $t$  au point d'abscisse  $x$ . Ces particules diffusent en obéissant à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion  $D$ . On montre que la fonction  $n$  est solution de l'équation suivante sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (E)$$

1. Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Montrer que pour tout  $A \in \mathbb{R}$ , la fonction  $n : (x, t) \mapsto \frac{A}{\sqrt{t}} e^{\frac{x^2}{4Dt}}$  est bien solution de (E).  
 2. On considère ici la fonction  $n$  de la question 1 pour  $A = D = 1$ .  
 (a) Pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , calculer  $\frac{\partial n}{\partial x}(x, t)$  et  $\frac{\partial n}{\partial t}(x, t)$  en précisant leurs signes.  
 (b) Sur un même dessin, proposer sur  $\mathbb{R}_+$  des représentations graphique de :

$$n_1 : x \mapsto n(x, t_1) \quad \text{et} \quad n_2 : x \mapsto n(x, t_2)$$

pour  $0 < t_1 < t_2$ .

#### Exercice 3 (C4)

Soit la fonction  $f$  d'expression  $f(x, y) = x e^{xy}$ .

1. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de  $f$  au point  $(1, 0)$ .  
 2. En déduire une valeur approchée de  $f(1, 1; -0, 1)$ .

#### Exercice 4 (C5)

Dans chacun des cas, calculer la dérivée de la fonction  $g$  en précisant l'intervalle de dérivabilité.

1.  $f(x, y) = e^{x+2y}$  et  $g(t) = f(\cos(t), t^3)$   
 2.  $f(x, y) = \ln(1 + xy)$  et  $g(t) = f(\sqrt{t}, t^2)$   
 3.  $f(x, y) = x^2 + e^y + xy$  et  $g(t) = f(e^t, \sin(t))$   
 4.  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  et  $g(t) = f(e^t, -t^2)$

#### Exercice 5 (C1-C4)

On considère les fonctions :

$$f : (x, y) \mapsto \ln(x^2 - y) \quad \text{et} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}$$

1. Déterminer et représenter dans le plan les domaines de définition de  $f$  et de  $g$ .  
 2. Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Déterminer la courbe (ou « ligne ») de niveau  $k$  de  $f$  et en proposer une représentation graphique. Même question pour la fonction  $g$ .

#### Exercice 6 (C2-C6)

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On considère la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

- (a) Déterminer le gradient de  $f$ .  
 (b) En quel point la fonction  $f$  peut-elle admettre un extremum ?  
 (c) Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $f(x, y) \geq -5$  et conclure.  
 2. La fonction  $f : x \mapsto x^3 + x^2 y$  admet-elle un extremum ? Justifier.

**Exercice 7 (C2-C6)**  On considère la fonction  $f : (x, y) \mapsto \frac{y}{1+x^2+y^2}$  définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

1. Déterminer le gradient de  $f$  et préciser les points critiques de cette fonction.
2. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad -\frac{1}{2} \leq f(x, y) \leq \frac{1}{2}$$

3. Conclure quant à l'existence d'extremums pour la fonction  $f$ .

**Exercice 8 (C1-C2-C6)**  Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose :

$$g(x, y) = (x + y) e^{-(x^2+y^2)}$$

1. Calculer le gradient de  $g$ . Quelles sont les valeurs de  $(x, y)$  susceptibles d'être des extremums pour  $g$ ?
2. Soit  $r \in \mathbb{R}_+$ . Quels sont les maximum  $M(r)$  et minimum  $m(r)$  de  $g$  sur le cercle  $\mathcal{C}_r$  de centre  $O(0, 0)$  et de rayon  $r$ ?

*On rappelle qu'un point  $M$  du plan (rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ) est caractérisé de manière unique par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $r = OM$  et  $\theta = \left( \vec{i}, \overrightarrow{OM} \right) \bmod 2\pi$ .*

3. Étudier les variations de  $M$  et de  $m$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
4. En déduire que  $g$  admet un maximum et un minimum global sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 9 (C1-C2-C8)**  1. Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(y)^2 + x$$

2. Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x) + 2y$$

3. Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

4. Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = x^2 + y^2$$

5. Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

6. Déterminer les fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - f(x, y) = x \quad \text{et} \quad f(x, 0) = 1 - x$$

**Exercice 10 (C1-C2-C6)**  Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On considère la fonction  $f_k$  définie par :

$$\forall (x, y) \in ]0, 1[^2, \quad f_k(x, y) = x^k y - x y^k$$

De plus,  $g_k$  et  $\varphi_k$  désignent les fonctions définies par :

$$g_k(x, y) = \frac{f_k(x, y)}{x - y} \quad \text{et} \quad \varphi_k(x) = g_k(x, 1 - x)$$

1. Représenter à l'aide d'un schéma l'ensemble de définition de  $g_k$  noté  $\mathcal{D}_1$  puis déterminer l'ensemble de définition de  $\varphi_k$  noté  $\mathcal{D}_2$ .
2. On cherche la limite de la fonction  $\varphi_k$  en  $\frac{1}{2}$ .
  - (a) Calculer les dérivées partielles de  $f_k$  en tout  $(x, y) \in ]0, 1[^2$  (on admet que  $f_k$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[^2$ ) et en déduire le nombre dérivé de  $x \mapsto f_k(x, 1 - x)$  au point  $\frac{1}{2}$ .
  - (b) En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \varphi_k(x) = \frac{k-1}{2^k}$$