Chapitre 7
Couples de variables aléatoires réelles discrètes

1 Généralités sur les couples de variables discrètes

1.1 Couple de variables aléatoires discrètes et loi conjointe

Définition 1.1.1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ dont les univers images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont discrets (finis ou infinis). On dit que :

$$(X,Y) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

est un **couple de variables aléatoires discrètes**.

Définition 1.1.2. On appelle **univers image du couple (X,Y)**, noté $(X,Y)(\Omega)$, le produit cartésien suivant :

$$\boldsymbol{(X,Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

Exemple 1.1.1. Pour chacun des couples de variables aléatoires suivants, déterminer l'univers image associé.

1. Une urne contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On en prélève deux successivement et avec remise. On note N_1 le premier numéro obtenu et N_2 le second.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1, 2\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On prélève simultanément deux boules et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand.

3. On réalise une succession de lancers d'une pièce de monnaie dont la probabilité de faire *pile* vaut $p \in]0, 1[$. On note L la longueur de la première chaîne de lancers jusqu'à l'obtention du premier *pile* et M la longueur de la seconde chaîne avant l'obtention du deuxième *pile*. Par exemple, si on a la succession de lancers FFPFFFP..., alors $L = 3$ et $M = 4$. Si on a la succession de lancers FPP..., alors $L = 2$ et $M = 1$.

Définition 1.1.3. La **loi conjointe** (ou loi de probabilité) du couple (X, Y) est donnée par :
- $(X, Y)(\Omega)$
- $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathrm{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$

Remarque 1.1.1.
1. On écrira désormais
$$\mathrm{P}(X = x, Y = y) = \mathrm{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$$
afin d'alléger un peu les notations (*la virgule fait donc office de « et »*).
2. Lorsque les univers images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut représenter la loi conjointe de (X, Y) à l'aide d'un tableau à double entrée.

Exemple 1.1.2. On reprend les expériences aléatoires et les variables aléatoires associées de l'exemple 1.1.1.
1. Déterminer la loi conjointe du couple (N_1, N_2).

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

3. Déterminer la loi conjointe du couple (L, M).

Proposition 1.1.1. On a pose $X(\Omega) = \{x_i \,|\, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \,|\, j \in J\}$ (univers images discrets éventuellement infinis). L'ensemble :

$$\{(X = x_i, Y = y_j) \,|\, (i,j) \in I \times J\}$$

est le **système complet d'événements associé au couple (X, Y)**.

Exemple 1.1.3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé. Soit (U, V) le couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \mathrm{P}(U = i, V = j) = A \min(i,j)$$

où A est un nombre réel. Déterminer la valeur de A.

1.2 Lois marginales

Définition 1.2.1. On appelle lois marginales du couple (X, Y) les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y.

Méthode 1.1. On peut obtenir la loi de X et la loi de Y à partir de la loi conjointe. Pour déterminer la loi de X à partir de la loi conjointe de (X, Y), on procède selon la méthode suivante :

1. Soit $n \in X(\Omega)$, on veut déterminer $P(X = n)$.
2. On considère le système complet d'événements associé à Y : $\{(Y = k) \mid \in Y(\Omega)\}$ et on applique la formule des probabilités totales :

$$\mathrm{P}(X = n) = \sum_{k \in Y(\Omega)} \mathrm{P}(X = n, Y = k)$$

3. On simplifie éventuellement l'ensemble de sommation et on calcule.

De la même manière, on obtient la loi de Y à partir de la loi conjointe de (X, Y) en inversant les rôles de X et Y dans la méthode précédente.

Exemple 1.2.1. 1. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) de l'exemple 1.1.2.

2. Déterminer les lois marginales du couple (L, M) de l'exemple 1.1.2.

3. Déterminer les lois marginales du couple (U, V) de l'exemple 1.1.3.

1.3 Loi conditionnelle

Définition 1.3.1.
- Soit $x \in X(\Omega)$. On appelle **loi conditionnelle de $\boldsymbol{Y}$ sachant $(\boldsymbol{X = x})$** l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Y(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \mathbf{P}_{\boldsymbol{X=x}}(\boldsymbol{Y = y}) \end{array} \right.$$

- Soit $y \in Y(\Omega)$. On appelle **loi conditionnelle de $\boldsymbol{X}$ sachant $(\boldsymbol{Y = y})$** l'application :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbf{P}_{\boldsymbol{Y=y}}(\boldsymbol{X = x}) \end{array} \right.$$

Exemple 1.3.1. Soit $y \in [\![2, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ pour le couple de l'exemple 1.1.2.

2 Espérance et variance d'une variable aléatoire du type $u(X,Y)$

2.1 Théorème de transfert sur un couple de variables aléatoires discrètes finies

Théorème 2.1.1 (Théorème de transfert pour un couple de variables aléatoires finies). Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes **finies**.
Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. La variable aléatoire $u(X,Y)$ admet une espérance et on a :

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})) = \sum_{\boldsymbol{k}\in \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\Omega})} \sum_{\boldsymbol{\ell}\in \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\Omega})} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell})\, \mathrm{P}(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\ell})$$

Exemple 2.1.1. Montrer $\mathrm{E}(XY)$ existe (le couple de l'exemple 1.1.2) et vaut :

$$\mathrm{E}(XY) = \frac{(3n+2)(n+1)}{12}$$

On admettra le fait que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\sum\limits_{j=1}^{p} j^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$.

2.2 Espérance, variance et indépendance de variables aléatoires

Proposition 2.2.1. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance et

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{XY}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{X})\mathbf{E}(\boldsymbol{Y}).$$

Proposition 2.2.2. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une variance, alors $X+Y$ admet une variance et :

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = \mathbf{V}(\boldsymbol{X}) + \mathbf{V}(\boldsymbol{Y}).$$

Proposition 2.2.3. Si $(X_1, \dots, X_n)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes admettant une variance, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance et :

$$\mathbf{V}\left(\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{X_k}\right) = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{V}(\boldsymbol{X_k}).$$

3 Covariance d'un couple de variables aléatoires discrètes

3.1 Définition et propriétés

Définition 3.1.1. On dit que le couple (X, Y) admet une **covariance**, notée $\mathbf{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$, si les variables aléatoires X, Y et $(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))$ admettent une espérance. Dans ce cas, la covariance du couple (X, Y) est définie par :

$$\mathbf{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathbf{E}((\boldsymbol{X} - \mathbf{E}(\boldsymbol{X}))(\boldsymbol{Y} - \mathbf{E}(\boldsymbol{Y})))$$

Théorème 3.1.1 (Théorème de Kœnig-Huygens).
Le couple (X, Y) admet une covariance si et seulement si les variables aléatoires X, Y et XY admettent une espérance et, dans ce cas :

$$\mathbf{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathbf{E}(\boldsymbol{XY}) - \mathbf{E}(\boldsymbol{X})\,\mathbf{E}(\boldsymbol{Y})$$

Démonstration.

□

Exemple 3.1.1. Une urne contient trois boules numérotées 1, 2 et 3. On prélève deux boules successivement avec remise. On note A le plus petit des numéros obtenus et B le plus grand.

1. Déterminer la loi du couple (A, B).

2. Déterminer ses lois marginales.

3. Déterminer la covariance du couple (A, B).

Exemple 3.1.2. Calculer la covariance du couple (X, Y) si elle existe (couple de l'exemple 1.1.2).

Proposition 3.1.2. On suppose que tous les couples mis en jeu admettent une covariance.

- **Symétrie de la covariance** : $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$
- **Propriété de bilinéarité de la covariance** : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{cov}(\lambda X + Y, Z) = \lambda\,\mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)$$

$$\mathrm{cov}(X, \lambda Y + Z) = \lambda \mathrm{cov}(X, Y) + \mathrm{cov}(X, Z)$$

- **Propriété de positivité de la covariance** : $\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{V}(X) \geqslant 0$
- Si X et Y admettent une variance, alors :

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = \mathbf{V}(\boldsymbol{X}) + \mathbf{2}\,\mathbf{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) + \mathbf{V}(\boldsymbol{Y})$$

3.2 Lien entre covariance et indépendance

Proposition 3.2.1. On suppose que (X, Y) admet une covariance.
Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbf{cov}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathbf{0}$$

Démonstration.

□

Exemple 3.2.1. Que vaut la covariance des variables aléatoires L et M (couple de l'exemple 1.1.2) ?

Remarque 3.2.1. **Attention, la réciproque est fausse** : si on a $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ alors on ne peut pas conclure que X et Y sont indépendantes ! Il existe effectivement des couples (X, Y) tels que $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ sans que X et Y ne soient indépendantes.

Corollaire 3.2.2. Si $\mathrm{cov}(X, Y) \neq 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes *(forme contraposée de la proposition).*

Exemple 3.2.2. Les variables aléatoires A et B de l'exemple 3.1.1 sont-elles indépendantes ?

Exemple 3.2.3. Soit (U, V) le couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathrm{P}(U = i, V = j) = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{i\,!\,(j-i)\,!\,2^j} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que la variable aléatoire U suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{2}$.

2. On admet que $V - U$ suit une loi de Poisson de même paramètre $\frac{1}{2}$. Montrer que les variables aléatoires $V - U$ et U sont indépendantes.

3. On admet que le couple (U, V) admet une covariance. Calculer celle-ci.

4 Méthodes classiques de détermination de loi d'une var discrète

4.1 Loi d'une somme de variables aléatoires discrètes

Méthode 4.1. Pour déterminer la loi de la va $X+Y$ quand on connaît les lois de X et de Y, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $(X+Y)(\Omega)$ à partir de ceux de X et Y.
2. On considère le système complet d'évènements associé à X : $((X=n), n \in X(\Omega))$.
3. Pour $k \in (X+Y)(\Omega)$, on détermine $P(X+Y=k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{n \in X(\Omega)} P(X+Y=k \cap X=n) \\ &= \sum_{n \in X(\Omega)} P(Y=k-n \cap X=n) \end{aligned}$$

4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que $k-n \in Y(\Omega)$.
5. On utilise l'indépendance des va X et Y ou leur non-indépendance (et la formule des probabilités composées) pour tranformer $P(Y=k-n \cap X=n)$ en un produit de probabilités.
6. On remplace les probabilités par leurs valeurs et on calcule la somme.

Exemple 4.1.1. 1. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ_i, avec $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes. Démontrer que la variable aléatoire $Y_n = X_1 + \ldots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Méthode 4.2. Pour déterminer la loi de la va $\boldsymbol{Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k}$ quand on connaît les lois discrètes des X_k, avec $(X_1, \ldots, X_n)$ mutuellement indépendantes, on procède par récurrence :

1. On initialise grâce à la loi de X_1 car $Z_1 = X_1$.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que la loi de Z_n soit celle annoncée. On écrit alors :

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} X_k = \sum_{k=1}^{n} X_k + X_{n+1} = Z_n + X_{n+1}.$$

   Par hypothèse de récurrence, on connaît la loi de Z_n et d'après l'énoncé, on connaît la loi de X_{n+1}, donc on applique la méthode précédente pour déterminer la loi d'une somme de deux variables aléatoires discrètes.

4.2 Loi d'une variable aléatoire discrète définie conditionnellement à une autre

Méthode 4.3. Pour déterminer la loi d'une va Y dont on connaît la loi conditionnellement à une va X, on applique la méthode suivante :

1. On détermine le support $Y(\Omega)$ à partir de celui de X et de la loi de Y conditionnellement à X.
2. On considère le système complet d'évènements associé à X : $((X = n), n \in X(\Omega))$.
3. Pour $k \in Y(\Omega)$, on détermine $P(Y = k)$ en appliquant la formule des probabilités totales :
$$P(Y = k) = \sum_{n \in X(\Omega)} P(Y = k \cap X = n).$$
4. On réduit alors la somme en trouvant les conditions sur n pour que les évènements $Y = k$ et $X = n$ ne soient pas incompatibles.
5. On applique la formule des probabilités composées :
$$P(Y = k) = \sum_{n \in ??} P(X = n) P_{(X=n)}(Y = k).$$
6. On remplace les probabilités par leurs valeurs et on calcule la somme.

Exemple 4.2.1. Supposons que X suive une loi de Poisson de paramètre λ et que la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ soit $\mathcal{B}(n, p)$, alors Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

4.3 Loi du min ou du max de variables aléatoires discrètes indépendantes

Méthode 4.4. Pour déterminer la loi du min ou du max de variables aléatoires discrètes indépendantes, on applique la méthode suivante :

1. On détermine la fonction de répartition du min ou du max.
2. On en déduit la loi du min ou du max grâce à la relation :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1).$$

Exemple 4.3.1 (Loi d'un maximum).
On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. On pose $M = \max(X, Y)$.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $\mathrm{P}(M \leqslant n)$.

2. En déduire la loi de probabilité de M.

Exemple 4.3.2 (Loi d'un minimum).
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, déterminer $\mathrm{P}(m_n \leqslant k)$.

2. En déduire la loi de probabilité de m_n.

3. Justifier que la loi obtenue est usuelle. Que valent l'espérance et la variance de m_n ?