Dénombrement - Probabilités - Variables aléatoires

I Dénombrement et combinatoire

1. Propriétés des cardinaux

Définition 1 Un ensemble E est fini si, et seulement s'il existe un entier $p > 0$ et une bijection de $[\![1,p]\!]$ sur E.
E peut alors s'écrire sous la forme $E = \{x_n \mid n \in [\![1,p]\!]\}$ où les x_n sont des éléments deux à deux distincts. L'entier p est le cardinal de E et on note card $E = p$
Par convention, card $\varnothing = 0$.

Remarque Si a et b sont deux entiers, l'ensemble $[\![a,b]\!]$ est fini de cardinal $b - a + 1$

Définition 2 Un ensemble E est dénombrable si, et seulement s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.
E peut alors s'écrire sous la forme $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont des éléments deux à deux distincts.
On peut alors énumérer les éléments sous la forme d'une suite.

Proposition 1 Soit E un ensemble et F un ensemble fini de cardinal p.
S'il existe une bijection f de E vers F alors E est fini et card $E = p$.

Preuve Puisque F est fini de cardinal p, il existe une bijection φ de $[\![1,p]\!]$ sur F.
Comme f est une bijection de E vers F, f^{-1} est une bijection de F vers E et $\varphi \circ f^{-1}$ est une bijection de $[\![1,p]\!]$ sur E.

Proposition 2 Résumé des propriétés sur les cardinaux vues en première année.
Soit A et B deux ensembles finis et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'ensembles finis.

(1) Si A et B sont disjoints alors card $(A \cup B)$ = card A + card B
(2) card $(A \setminus B)$ = card A −card $(A \cap B)$
en particulier si $B \subset A$ alors card $(A \setminus B)$ = card A −card B
(3) Si E est un ensemble fini et A une partie de E alors card $(\overline{A})$ = card E − card A
(4) $A \times B$ est un ensemble fini et card $(A \times B)$ = card $A \times$ card B
Pour tout entier $k > 0$, card $(A^k) = \left(\text{card } A\right)^k$
(5) card $(A \cup B)$ = card A +card B −card $(A \cap B)$
(6) Formule du crible de Poincaré

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left[\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} card(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right]$$

(7) Utilisation d'un recouvrement disjoint d'un ensemble E
Soit E un ensemble fini et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de parties de E telle que :
$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ alors card $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}$ card A_i
En particulier, si $\forall i \in [\![1,n]\!]$ card $A_i = c$ alors card $E = nc$.

2. p-listes d'un ensemble à n éléments

Définition 3 Soit E un ensemble et p un entier strictement positif.
Une *p-liste* ou un *p-uplet* d'éléments de E est un élément du produit cartésien E^p.
Une *p-liste* est notée $(x_1, \cdots, x_p)$.

Proposition 3 Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier strictement positif.
Le nombre de *p-listes* d'élements de E est n^p.

Preuve D'après la propriété (7) précédente, card $(E^p) = \left(\text{card } E\right)^p = n^p$

Conséquence • Soit E et F deux ensembles finis tels que card$E = p$ et card$F = n$.
Le nombre d'applications de E vers F n^p.

• Le nombre de tirages successifs et avec remise de p boules d'une urne qui contient n boules discernables est n^p.

Preuve • Soit $E = \{e_1, \cdots, e_p\}$ alors une application f est entièrement déterminée par la donnée d'une *p-liste* $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ d'éléments de F

• Un tirage de p boules successivement et avec remise dans une urne est une *p-liste* de boules de l'urne (on tient compte de l'ordre et il y a répétition)

3. p-arrangements et permutations d'un ensemble à n éléments

Définition 4 Soit E un ensemble et p un entier strictement positif.
Un p-arrangement d'éléments de E est une *p-liste* d'éléments deux à deux distincts de E.

Proposition 4 Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier strictement positif.
Le nombre de p-arrangements d'éléments de E, noté $\mathcal{A}_n^p$, est égal à :

$$\mathcal{A}_n^p = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}.$$

Preuve On a n choix pour la première composante. Pour chacun de ces choix, on a $(n-1)$ choix pour la seconde composante, puis $(n-2)$ pour la suivante, et ainsi de suite.
Si $p > n$ alors pour la $(n+1)$-ième composante, il n'y a plus aucun choix.
Si $p \leqslant n$ alors pour la p-ième composante, il restera $(n-p+1)$ choix.

Conséquence • Le nombre d'applications injectives d'un ensemble E à p éléments vers un ensemble F à n éléments est $\mathcal{A}_n^p$

• Le nombre de tirages successifs et sans remise de p boules d'une urne qui contient n boules discernables est $\mathcal{A}_n^p$.

Preuve • Soit $E = \{e_1, \cdots, e_p\}$ alors une application injective f est entièrement déterminée par la donnée d'une *p-liste* $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ d'éléments deux à deux distincts de F

• Un tirage de p boules successivement et sans remise dans une urne est un p-arrangement de boules de l'urne(on tient compte de l'ordre et il n'y a pas répétition).

Définition 5 Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$.
Une permutation de E est un n-arrangement des éléments de E.

Proposition 5 Le nombre de permutations des éléments de E est $n!$.

Conséquence • Le nombre d'applications bijectives d'un ensemble E à n éléments vers un ensemble F à n éléments est $n!$.

• Le nombre de tirages successifs et sans remise de n boules d'une urne qui contient n boules discernables est $n!$.

Preuve C'est le cas particulier où $n = p$.

4. p-combinaisons d'un ensemble à n éléments

Définition 6 Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$ et soit p un entier naturel.
Une p-combinaison d'élements de E est une partie à p éléments de E.
On note $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments de E.
Une p-combinaison d'élements de E est un élément de $\mathcal{P}_p(E)$.
On les note $\{x_1, \cdots, x_p\}$ où $x_1, \cdots, x_p$ sont p éléments deux à deux distincts de E.

Proposition 6 Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$ et soit p un entier naturel.
Le nombre de p-combinaisons d'élements de E, noté $\binom{n}{p}$ (ou $\mathbb{C}_n^p$), est égal à :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{\mathcal{A}_n^k}{p!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}.$$

Preuve Comme E contient n éléments, si $p > n$ alors il n'y a aucune partie *à* p éléments distincts de E.
Si $p \leqslant n$ alors, à toute partie de $\mathcal{P}_p(E)$ correspondent $p!$ arrangements de p éléments de E.
Comme il y a $\mathcal{A}_n^p$ p-arrangements d'éléments de E, il y a $\dfrac{\mathcal{A}_n^p}{p!}$ parties à p éléments de E.

Proposition 7 • Le nombre de tirages simultanés de p boules dans une urne qui contient n boules discernables est $\binom{n}{p}$ (on ne tient pas compte de l'ordre et il n'y a pas répétition)
• Le nombre de suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et n est $\binom{n}{p}$.

Preuve • Effectuer un tirage simultané de p boules dans une urne qui en contient n, c'est chosir p éléments dans un ensemble qui en contient n.
• Une suite strictement croissante de p entiers compris entre 1 et n est un n-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$ tel que $1 \leqslant x_1 < \cdots < x_p \leqslant n$.
À toute partie de p éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ correspond une et une seule (il y a bijection) suite strictement croissante de p entiers compris entre 1 et n.
En effet, il y a une seule manière de les ranger dans l'ordre croissant et ils sont deux à deux distincts donc la suite obtenue est strictement croissante.

Proposition 8 Propriétés principales des coefficients binomiaux. Soit n et p deux entiers naturels.
(1) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
(2) Formule d'Euler $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$
(3) Formule de Pascal $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$
(4) Formule du binôme de Newton

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2,\ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

En particulier : $\forall x \in \mathbb{C},\ (1+x)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p$ et, pour $x = 1$, $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

$$\forall n > 0, \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (-1)^p = 0$$

(5) Formule de Vandermonde

$$\forall (a, b, n) \in \mathbb{N}^3,\ \sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid p+q=n} \binom{a}{p}\binom{b}{q} = \binom{a+b}{n}$$

Preuve à faire en exercice

II Probabilités

1. Expérience aléatoire et événements liés à cette expérience

Définition 7 • Une expérience aléatoire ou une épreuve aléatoire est une expérience dont le résultat ne peut pas être prévu de manière certaine.

• L'ensemble des résultats possibles d'une expérience est appelé univers et noté Ω.

• Un élément ω de Ω est appelé une éventualité, un possible ou un événement élémentaire.

• Un événement est une propriété liée à l'expérience qui peut être réalisée ou non.

On identifie un événement au sous ensemble de Ω constitué des résultats pour lesquels la propriété est vérifiée.

• Ω est l'événement certain et $\varnothing$ est l'événement impossible

• Soit A et B deux événements

-$A \subset B$ ou $A \Rightarrow B$ signifie que si A est réalisé alors B est réalisé aussi

-$A \cap B$ est l'événement "A et B".

Il est réalisé si, et seulement si, A et B sont réalisés simultanément

-$A \cup B$ est l'événement "A ou B".

Il est réalisé si, et seulement si, A est réalisé ou B est réalisé ou les deux sont réalisés.

-Si $A \cap B = \varnothing$ alors A et B sont incompatibles

-$\overline{A}$ est l'événement contraire de A. $\overline{A}$ est rélaisé si, et seulement si, A n'est pas réalisé

-$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Exemple On lance une pièce de monnaie et on s'arrête dès que l'on obtient pile pour la 1ère fois.

Si on obtient pile au n-ième lancer le résultat obtenu peut s'écrire : $\omega_n = \underbrace{(F, \cdots, F, P)}_{n \text{ termes}},\ n > 0$.

L'événement "l'expérience s'arrête avant le quatrième lancer" est
$A = \{(P), (F, P), (F, F, P), (F, F, F, P)\}$

L'événement "l'expérience s'arrête après le n-ième lancer" est $A_n = \displaystyle\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \{\omega_k\}$.

C'est une réunion dénombrable d'éventualités.

Remarque Il faut supposer que l'ensemble des événements soit stable par réunion dénombrable, c'est-à-dire que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est un événement.

Définition 8 On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur Ω, une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :

- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire ($A \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{T}$)
- $\mathcal{T}$ est stable pour la réunion (pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, $\left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{T}$

Définition 9 Soit une expérience d'univers Ω.

L'ensemble des événements liés à cette expérience est une tribu $\mathcal{T}$.

•Si Ω est fini ou dénombrable, toute partie de Ω est un événement et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

•Si Ω est infini dénombrable, $\mathcal{T}$ est une partie stricte de $\mathcal{P}(\Omega)$

Le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est appelé un espace probabilisable.

2. Définition et premières propritétés d'une probabilité

Définition 10 Soit une expérience d'univers Ω.

On appelle probabilité sur Ω toute application P de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

• $\forall A \in \mathcal{T},\ P(A) \geqslant 0$

• $P(\Omega) = 1$

• Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, la série $\sum P(A_n)$ (à termes positifs) est convergente de somme égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ est alors appelé un espace probabilisé et, pour tout A de $\mathcal{T}$,

le réel positif $P(A)$ est appelé la probabilité de l'événement A.

Définition 11 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

• Soit $A \in \mathcal{T}$. On dit que A est un événement négligeable ou quasi-impossible si $A \neq \varnothing$ et $P(A) = 0$.

• Soit $A \in \mathcal{T}$. On dit que A est un événement presque certain ou quasi-certain si $A \neq \Omega$ et $P(A) = 1$.

•Toute propriété vérifiée sur un ensemble de probabilité 1 est dite presque sûre ou vraie presque partout.

Exemple Expérience : on lance une pièce de monnaie bien équilibrée et on s'arrête dès que l'on obtient pile pour la 1ère fois.

Soit A l'évenement : "on n'obtient jamais pile".

Il est clair que $A \neq \varnothing$.

On note F_n l'événement "le n-ième lancer a donné face",

On a alors $A = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(F_n) = P(\overline{F_n}) = \dfrac{1}{2}$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $A_N = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{N} F_n$ alors $A \subset A_N$ donc $0 \leqslant P(A) \leqslant P(A_N)$.

Comme $P(A_N) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^N$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_N) = 0$ et, par encadrement, $P(A) = 0$.

L'événement A est quasi-impossible.

Proposition 9 Soit une expérience d'univers Ω et P une probabilité définie sur $\mathcal{T}$.

• $P(\varnothing) = 0$

• soit $A_1, \cdots, A_n$ n événements deux à deux incompatibles, $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

En particulier, $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

• Pour tout événement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

• Pour tout couple (A,B) d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

En particulier, si $B \subset A$ alors $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ et donc $P(B) \leqslant P(A)$

• Formule du crible (de Poincaré) : pour tous événements $A_1, \cdots, A_n$ de $\mathcal{P}(\Omega)$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} P(\bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m}) \right]$$

En particulier, $P(A \cup B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - (P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)) + P(A \cap B \cap C)$

On déduit des propriétés précédentes que, pour tout événement B de $\mathcal{T}$,

• si A est un événement alors $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

3. Systèmes complets et quasi-complets d'événements

Définition 12 Soit une expérience d'univers Ω.

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ une suite d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ avec $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$.

• $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ est un système complet d'événements si, et seulement si :

$\forall (i,j) \in \mathbb{I} \mid i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$ et $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i = \Omega$.

• $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ est un système quasi-complet d'événements si, et seulement si :

$\forall (i,j) \in \mathbb{I} \mid i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing$ et $P\left(\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{I}} A_i\right) = 1$.

Proposition 10 Soit une expérience d'univers Ω.

• $\forall A \in \mathcal{T}$, le couple $(A,\overline{A})$ est un système complet d'événements.

• Si $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ alors le n-uplet $(\{\omega_1\}, \cdots, \{\omega_n\})$ est un système complet d'événements.

• Si $\Omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$ alors la famille $(\{\omega_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Proposition 11 Soit une expérience d'univers Ω.

• si $(A_1, \cdots, A_n)$ est un système complet fini d'événements alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = P(B)$

• si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet infini dénombrables d'événements alors la série $\sum P(B \cap A_n)$ est convegrente de somme égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = P(B)$.

4. Caractérisation d'une probabilité

a. Cas d'un univers fini :

soit $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ alors l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$ est fini et card $\mathcal{P}(\Omega) = 2^n$.

Proposition 12 Soit $(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$

(ii) $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Quand elle existe, la probabilité P est unique et $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \displaystyle\sum_{i\in[\![1,n]\!] \mid \omega_i\in A} p_i$.

Définition 13 La probabilité uniforme sur Ω est définie par : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$.

Proposition 13 Si P est la probabilité uniforme sur Ω alors $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{n} = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{nombre cas favorables à la réalisation de } A}{\text{nombre cas possibles}}.$$

b. Cas d'un univers infini dénombrable :

Soit $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$

Proposition 14 Soit (p_n) une suite de nombres réels. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{T})$ qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{\omega_n\}) = p_n$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geqslant 0$ et la série $\sum p_n$ est convergente de somme égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Quand elle existe, la probabilité P est unique et, pour tout événement A de $\mathcal{T}$, $P(A) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N} \mid \omega_n\in A} p_n$.

Définition 14 L'application $P : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & [0,1] \\ \omega_n & \mapsto & p_n \end{array} \right.$ où $p_n = P(\{\omega_n\})$ est appelée une distribution de probabilité sur Ω associée à la probabilité P.

Exercice 1 Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ 5p_{n+2} = 6p_{n+1} - p_n$.

Montrer qu'il existe une unique probabilité P sur $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = p_n$.

III Conditionnement - Indépendance

Soit une expérience d'univers Ω et P une probabilité définie sur $\mathcal{T}$.

1. Probabilités conditonnelles

Définition 15 Pour tout événement A non négligeable (ie $P(A) \neq 0$) de $\mathcal{T}$,

l'application $P_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & \mathbb{R} \\ B & \mapsto & \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array} \right.$ est une probabilité sur Ω

appelée probabilité conditionnelle sachant A.
On note indifféremment $P_A(B) = P(B \mid A)$ la probabilité de B sachant A.
On en déduit que : $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2,\ P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.
Comme P_A est une probabilité, elle possède toutes les propriétés d'une probabilité.

En particulier $\forall (B,C) \in \mathcal{T}^2,\ P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C),\ P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Exercice 2 Deux urnes, U et V contiennent chacune quatre boules blanches et huit boules noires.
• On tire au hasard une boule dans l'urne U. On note sa couleur et on la met dans l'urne V
• On tire au hasard une boule dans l'urne V et on note sa couleur.
On note B_i (rep. N_i) "on tire une boule blanche (noire) au i-ième tirage", $i = 1,2$.
Calculer $P(B_1),\ P(N_1), P(B_2)$ et $P(N_2)$.

2. Indépendance de deux événements

Définition 16 Soit $(A,B) \in \mathcal{T}^2$ un couple d'événements.
A et B sont indépendants pour la probabilité P si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Proposition 15 Soit $(A,B) \in \mathcal{T}^2$ un couple d'événements tel que $P(A) \neq 0$.
A et B sont indépendants pour la probabilité P si, et seulement si, $P_A(B) = P(B)$.

Remarque Si A et B sont incompatibles et $P(A)P(B) \neq 0$ alors A et B ne sont pas indépendants.

Proposition 16 Si A et B sont indépendants pour la probabilité P alors les événements A et $\overline{B}$ (resp. $\overline{A}$ et B, resp. $\overline{A}$ et $\overline{B}$) sont indépendants pour la probabilité P.

Exercice 3 On tire au hasard successivement deux boules d'une urne contenant 5 blanches et 2 noires.
On note B_i (rep. N_i) l'événement "on tire une boule blanche (resp. noire) au i-ième tirage", $i = 1,2$.
B_1 et B_2 sont-ils indépendants si on fait les tirages avec remise ? sans remise ?

3. Indépendance d'une famille d'événements

a. Cas d'une famille finie d'événements :

Définition 17 Soit $A_1, \cdots, A_n$ n événements de $\mathcal{T}$.

• $A_1, \cdots, A_n$ sont deux à deux indépendants pour la probabilité P si, et seulement si :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \neq j,\ P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.

• $A_1, \cdots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants pour la probabilité P si, et seulement si :
$\forall \mathbb{I} \subset [\![1,n]\!],\ P\left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i\right) = \prod_{i\in\mathbb{I}} P(A_i)$.

Proposition 17 Si $A_1, \cdots, A_n$ sont mutuellement indépendants alors ils sont deux à deux indépendants.

Preuve Il suffit de choisir pour sous ensemble $\mathbb{I}$, toutes les parties à deux indices de $[\![1,n]\!]$.

Remarque La réciproque de cette proposition est fausse.

Exercice 4 On lance deux fois un dé équilibré et on note les événement A_1 : "le premier jet donne un n° pair", A_2 : "les deux n° obtenus sont de parité différente", A_3 : "le deuxième jet donne un n° impair".
Étudier l'indépendance des événements A_1, A_2 et A_3.

b. Cas d'une famille infinie dénombrable d'événements :

Définition 18 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$.
Les événements A_n, $n \in \mathbb{N}$, sont (mutellement) indépendants pour la probabilité P si, et seulement si, pour toute partie finie $\mathbb{I}$ de $\mathbb{N}$, $P\left(\bigcap_{i\in\mathbb{I}} A_i\right) = \prod_{i\in\mathbb{I}} P(A_i)$
ou, de manière équivalente, $\forall n \in \mathbb{N},\ P\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right) = \prod_{i=0}^{n} P(A_i)$.

Proposition 18 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$ indépendants pour la probabilité P.
Alors $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N},\ A'_n = A_n$ ou $\overline{A_n}$ est une suite d'événements de $\mathcal{T}$ indépendants pour P.

IV Les formules du calcul des probabilités

Soit une expérience d'univers Ω et P une probabilité définie sur $\mathcal{T}$.

1. Formule des probabilités composées

Elle est utilisée dans le cas d'épreuves successives non indépendantes pour calculer la probabilité du bout d'une branche dans un arbre de probabilité.

Définition 19 Soit n événements $A_1, \cdots, A_n$ de $\mathcal{T}$ tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$

Preuve En exercice par récurrence à partir de $n = 2$.

Exercice 5 Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires.
On tire au hasard successivement et sans remise quatre boules dans cette urne.
Calculer la probabilité d'obtenir deux blanches puis deux noires dans cet ordre.

2. Formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales est utilisée dans la gestion des choix multiples lorsque la réalisation d'un événement dépend de la réalisation d'autres événements.

Proposition 19 • Soit $(A_i)_{i\in I}$, où $I \subset \mathbb{N}$, un système quasi-complet d'événements de $\mathcal{T}$ tels que $\forall i \in I$, $P(A_i) \neq 0$.

$\forall B \in \mathcal{T}$, la série $\sum P(A_i)P_{A_i}(B)$ est convergente de somme égale à $\sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i)P_{A_i}(B) = P(B)$.

• En particulier, soit A un événement de $\mathcal{T}$ tel que $0 < p(A) < 1$ alors
$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$

Preuve B est la réunion disjointe des événements $(A_i \cap B)_{i\in I}$ donc
$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$.

Exercice 6 Soit une urne blanche et une urne rouge contenant des boules blanches et des boules rouges.
Soit $(b,r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < b < 1$ et $0 < r < 1$.
L'urne blanche contient une proportion b de boules blanches et l'urne rouge, une proportion r de boules rouges.
On choisit une urne. La probabilité de choisir l'urne blanche est p, $p \in]0,1[$.
On tire une boule au hasard de cette urne.
Si la boule tirée est de la même couleur que l'urne, on tire à nouveau une boule de cette urne.
Sinon, on tire une boule dans l'autre urne.
On poursuit ainsi ces tirages avec remise :
la n-ième boule est tirée dans l'urne dont la couleur est celle de la $(n-1)$-ième boule tirée.
Soit b_n et r_n les probabilités que la n-ième boule tirée soit blanche ou rouge respectivement.
1- Calculer b_1 et r_1 puis trouver une relation de récurrence entre b_{n+1} et b_n.
2- En déduire l'expression de b_n en fonction de b, r et n.
3- quelle est la limite de b_n quand n tend vers $+\infty$?

3. Formule de Bayes ou formule de probabilité des causes

Formule utilisée dans un cas de choix multiples quand, connaissant l'issue, on veut connaître la cause.

Proposition 20 Soit $(A_1, \cdots, A_n)$ un système complets d'événements de $\mathcal{T}$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Alors, pour tout événement non négligeable B de $\mathcal{T}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P_B(A_i) = \dfrac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}$.

En particulier, soit A et B deux événements tels que $P(A)P(B) \neq 0$ alors $P_B(A) = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$.

Preuve Simple application de la probabilité conditionnelle et de la formule des probabilités totales.

Exercice 7 Un magasin M qui vend des ordinateurs se fournit auprès de deux entreprises A et B.
40% des appareils commandés par M proviennent de A.
On constate que parmi les ordinateurs livrés 5% (resp. 3%) de ceux fabriqués par A (resp. B) sont défectueux.
Un technicien prend au hasard un ordinateur qui vient d'être livré, le teste et constate qu'il présente un défaut.
Quelle est la probabilité que cet ordinateur provienne de l'entreprise A ?

V Variables aléatoires réelles

Soit une expérience d'univers Ω et P une probabilité définie sur $\mathcal{T}$.

1. Définition et premières propriétés

Définition 20 Une variable aléatoire réelle sur Ω est une application X de Ω dans $\mathbb{R}$.
Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$: $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ est appelé l'univers image.

Proposition 21 L'ensemble des variables aléatoires réelles est un espace vectoriel.
Ainsi, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur Ω alors, pour tous réels λ et μ, $\lambda X + \mu Y$ est une variable aléatoire réelle sur Ω.

Notation Pour tout réel x, les événements liés à X sont :
-$[X = x] = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$
-$[X < x] = X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$
-$[X > x] = X^{-1}(]x, +\infty[\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$
-$[X \leqslant x] = [X < x] \cup [X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$
-$[X \geqslant x] = [X > x] \cup [X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}$
Pour tous réels a et b, $[a \leqslant X < b] = X^{-1}([a,, b[) = \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\}$.

Définition 21 Soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω.
On dit que :
- X est discrète lorsque $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{I}\}$ où $\mathbb{I}$ est une partie de $\mathbb{N}$
- X est discrète finie lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{I} = [\![1, n]\!]$ c'est-à-dire $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$
- X est à densité lorsque $X(\Omega)$ est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) non réduit à un point

Proposition 22 Soit $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire réelle discrète d'univers image $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{I}\}$.
La famille $([X = x_n])_{n \in \mathbb{I}}$ est un système complet d'événements.
En particulier :
si $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$
si $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ alors la série $\sum P(X = x_n)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$.
On a aussi : $\forall A \subset \mathbb{R},\ P(X \in A) = \displaystyle\sum_{x \in A \cap X(\Omega)} P(X = x)$.

Exercice 8 On lance deux dés classiques et on note X la variable aléatoire égale à la somme des deux dés.
1) Déterminer son univers image $X(\Omega)$ et donner le système complet d'événement liés à X.
2) Déterminer les événements $[X \leqslant 4]$, $[X > 1]$, "X est pair".

2. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 22 Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.
On appelle fonction de répartition de X, et on note F_X, l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & P(X \leqslant x) \end{array} \right. .$$

Exercice 9 Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire de l'exercice 8.
Représenter la fonction F.

Proposition 23 Soit F_X la fonction de répartition de X alors

- $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) \in [0,1]$
- F_X est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$

Preuve •Pour tout x réel, $F_X(x) = P(X \leqslant x) \in [0,1]$

•Pour tous x et y réels tels que $x \leqslant y$ alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, y]$ donc $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]$ et $P(X \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant y)$.

On a alors $x \leqslant y \Rightarrow F_X(x) \leqslant F_X(y)$ et F_X est croissante.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(-n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X \leqslant -n) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X \leqslant n) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} P(X > n) = 1$.

Proposition 24 Soit F_X la fonction de répartition de X alors

- F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t\to x^+} F_X(t) = F_X(x)$)
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t\to x^-} F_X(t) = F_X(x) - P(X = x) = P(X < x)$.

Proposition admise.

Conséquence pour tout réel a, F_X est continue en a si, et seulement si, $P(X = a) = 0$.