DM4 Suite récurrente, somme et équivalent

pour jeudi 17 octobre

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} \end{cases}$$

et, pour tout entier naturel $n,$ on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k.$

1. **a.** Écrire une fonction Python $u(n),$ d'argument un entier naturel $n,$ qui renvoie la valeur de $u_n.$ Tester la fonction pour des grandes valeurs de $n.$

b. Écrire une fonction Python $S(n),$ d'argument un entier naturel $n,$ qui renvoie la valeur de $S_n.$ Représenter sous Python la suite $(u_nS_n)_{n\in\mathbb{N}}.$

c. Écrire une fonction Python $f(M)$ d'argument un flottant $M,$ qui renvoie le plus petit entier n pour lequel $S_n > M.$

d. Quelles conjectures peut-on émettre à partir des résultats précédents ?

2. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0.$

b. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

4. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{u_n} = 1 + S_{n-1}.$

b. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nS_n = 1.$

5. **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1}^2 - S_n^2 = 2 + u_{n+1}(u_{n+1} - 2).$

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n^2 = 2n + 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_{k+1}(u_{k+1} - 2).$

c. Pour tout entier natruel $n,$ on pose $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_{k+1}(u_{k+1} - 2).$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant 2S_n.$
En déduire que la suite $(a_nu_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

d. Montrer que u_n^2 est équivalent à $\dfrac{1}{2n}.$
En déduire que S_n est équivalent à $\sqrt{2n}.$