Corrigé DM4

1. **a.** On utilise la formule de récurrence qui définit la suite $(u_n)_n$:

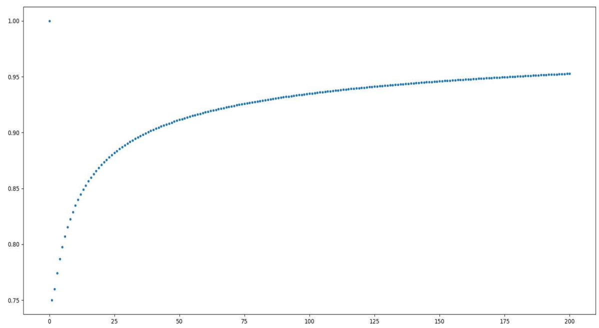
```python
def u(n):
    u = 1
    for _ in range(n):
        u = u/(1+u**2)
    return u
```

b. On initialise une liste avec la valeur de $S_0 = u_0 = 1$ puis on utilise une boucle `for` :

```python
def liste_S(n):
    L = [1]
    for k in range(1,n+1):
        L.append(L[-1]+u(k))
    return L
```

On construit la liste $[u_0 S_0, \cdots, u_n S_n]$ et on import le module `matplotlib.pyplot` :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
n = 200
Ln = list(range(n+1))
LuS = [u(k)*S(k) for k in Ln]
plt.plot(Ln,LuS,'.')
plt.show()
```



c. On utilise une boucle `while` :

```python
def f(M):
    n = 0
    while S(n) <= M:
        n += 1
    return n
```

d. D'après ce qui précède, on conjecture que :

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0,\ (u_n S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante, } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n S_n = 1 \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$.

2. **a.** On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

Initialisation pour $n = 0$: $u_0 = 1$ donc $u_0 \geqslant 0$. La propriété est vérifiée au rang 0.

Hérédité : supposons que $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$.

Or $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ donc $u_{n+1} \geqslant 0$ et la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$, $\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+u_n^2} - u_n = \dfrac{-u_n^3}{1+u_n^2} \leqslant 0$ d'après **1**.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, étant minorée (par 0 d'après **1.**),

$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$, en passant à la limite, on obtient $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2}$.

Comme $\ell = \dfrac{\ell}{1+\ell^2} \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $1 = \dfrac{1}{1+\ell^2} \Leftrightarrow \ell = 0$, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

3. **a.** Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{u_n} = 1 + S_{n-1}$.

Initialisation pour $n = 1$: $\dfrac{1}{u_1} = \dfrac{1+u_0^2}{u_0} = \dfrac{1}{u_0} + u_0 = 2$ or $1 + S_0 = 1 + u_0 = 2$.

On a bien $\dfrac{1}{u_1} = 1 + S_0$ et la propriété est initialisée.

Hérédité : supposons que $\dfrac{1}{u_n} = 1 + S_{n-1}$ et montrons que $\dfrac{1}{u_{n+1}} = 1 + S_n$.

Or $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1+u_n^2}{u_n} = \dfrac{1}{u_n} + u_n = 1 + S_{n-1} + u_n$.

Or $S_{n-1} + u_n = S_n$ donc on a bien $\dfrac{1}{u_{n+1}} = 1 + S_n$ et la propriété est héréditaire.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{u_n} = 1 + S_{n-1}}$.

b. D'après **3a.**, $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - 1$ et d'après **1.** et **2.**, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0^+$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc $\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est divergente}}$.

Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_{n+1}} = 1 + S_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 = u_{n+1} + u_{n+1}S_n$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}S_n = 1$. Enfin, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n^2}$.

De $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_nS_n$.

On a bien $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_nS_n = 1}$.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$S_{n+1}^2 - S_n^2 = (S_{n+1} - S_n)(S_{n+1} + S_n) = u_{n+1}(u_{n+1} + 2S_n)$ car $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$

$= u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}S_n = u_{n+1}^2 + 2(1 - u_{n+1})$ d'après un calcul dans **3b**.

On a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1}^2 - S_n^2 = 2 + u_{n+1}(u_{n+1} - 2)}$.

b. À l'aide de l'égalité précédente, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(S_{k+1}^2 - S_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1}(2 + u_{n+1}(u_{n+1} - 2))$

et, par télescopage, $S_n^2 - S_0^2 = 2n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}(u_{k+1} - 2)$.

Comme $S_0 = 1$, on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ S_n^2 = 2n + 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}(u_{k+1} - 2)}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}(u_{k+1} - 2)$.

Par l'inégalité triangulaire, on a $|a_n| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1}(u_{k+1} - 2)|$.

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc $\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_0$.

Comme $u_0 = 1$, $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$ et donc $|u_{k+1}(u_{k+1} - 2)| = u_{k+1}(2 - u_{k+1}) \leqslant 2u_{k+1}$.

Ainsi, $|a_n| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2u_{k+1}$. Par changement d'indice, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2u_{k+1} = 2\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Comme $u_0 \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$ et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant 2S_n}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_nu_n^2| \leqslant 2u_n^2S_n$.

D'après **3b.**, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nS_n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Ainsi, par encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_nu_n^2 = 0}$.

d. D'après **4b.**, $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n^2 = 2n + 1 + a_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2S_n^2 = (2n+1)u_n^2 + a_nu_n^2$.

De $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nS_n = 1$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}((2n+1)u_n^2 + a_nu_n^2) = 1$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_nu_n^2 = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)u_n^2 = 1$.

Enfin, comme $2n + 1 \sim 2n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_n^2 = 1$ et donc $\boxed{u_n^2 \sim \dfrac{1}{2n}}$.

Finalement, comme $u_n \geqslant 0$, $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ et, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nS_n = 1$, $S_n \sim \dfrac{1}{u_n}$ et donc $\boxed{S_n \sim \sqrt{2n}}$.