I Rappels sur le changement de bases

1 Matrices de passage

Dans tout le chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

DÉFINITION

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{B}' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ une famille de n vecteurs de E.
On pose : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $e'_j = p_{1j}e_1 + \cdots + p_{nj}e_n = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}e_i$, les scalaires p_{ij} étant les coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $P = (p_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice carrée d'ordre n dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées du vecteur e'_j dans la base B.

Alors : $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de E} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(\mathcal{B}') = n \Leftrightarrow \mathrm{rg}(P) = n \Leftrightarrow P \text{ est inversible.}}$

Dans ce cas, P est appelée la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et on note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Exemple :
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbf{R}^3$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
On pose $\mathcal{B}'$ la famille (e'_1, e'_2, e'_3) avec : $e'_1 = (1, 2, 1), e'_2 = (0, 4, 3)$ et $e'_3 = (5, 1, 6)$.

Alors : $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -9 \\ 0 & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 9L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{31} & 0 \\ 0 & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix} = 3$$

donc : P est inversible, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^3$, et P est la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Cas particulier :
Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

PROPRIÉTÉ

Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ sont trois bases de E, alors :

$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$

2 Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur

PROPRIÉTÉ

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soit u un vecteur de E. Ils possède des coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$$

Soit $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ la matrice-colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $X' = {}^t(x'_1, \cdots, x'_n)$ la matrice-colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$.
Alors : $\boxed{X = PX'}$ ou encore : $\boxed{X' = P^{-1}X}$

Exemple :
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbf{R}^2$, et soit la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (3, 4)$ et $e'_2 = (5, 7)$.
Alors $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. On calcule : $\det(P) = 3 \times 7 - 5 \times 4 = 1 \neq 0$ donc P est inversible et $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbf{R}^2$. On a de plus : $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $u = (1, 2) \in \mathbf{R}^2$. Alors $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on obtient X' en calculant :

$X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. On peut vérifier que : $-3e'_1 + 2e'_2 = -3(3, 4) + 2(5, 7) = (1, 2)$.

II Réduction des matrices carrées

1 Éléments propres d'une matrice carrée

DÉFINITION

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
λ est **valeur propre** de A si et seulement si il existe une matrice-colonne <u>non nulle</u> X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ telle que $AX = \lambda X$.

Si λ est valeur propre de A :

$*$ Une matrice-colonne X non nulle telle que $AX = \lambda X$ est alors appelée un **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ.

$*$ $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \mid AX = \lambda X\}$ est appelé le **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le **spectre** de A et noté $\mathrm{Sp}(A)$:

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbf{K} \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \mid X \neq 0_n \text{ et } AX = \lambda X\}.$$

Remarque : $AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0_n$ où I_n désigne la matrice-identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,
et 0_n désigne la matrice-colonne nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

PROPOSITION

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors E_λ est un sous-espace vectoriel <u>non nul</u> de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
En conséquence, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \dim(E_\lambda) \geqslant 1$.

preuve :

PROPOSITION

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :
$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

preuve :

Cas particulier : A n'est pas inversible si, et seulement si 0 est valeur propre de A.

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de A.

PROPRIÉTÉ

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

preuve :

2 Matrice diagonalisable

PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres :
si $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A)$ avec $\lambda \neq \mu$, si $X \in E_\lambda$, $Y \in E_\mu$ et $X, Y \neq 0_n$, alors :

$$\forall a, b \in \mathbf{K},\ (aX + bY = 0_n) \Rightarrow (a = b = 0).$$

preuve :

PROPRIÉTÉ (Généralisation)

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

preuve :

PROPRIÉTÉ

Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

preuve :

Proposition

Une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres disctinctes et la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

preuve :

Définition

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite **diagonalisable** si, et seulement s'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ constituée de vecteurs propres de A.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
A est diagonalisable si, et seulement s'il existe une matrice carrée inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que $AP = PD$.
Dans ce cas, on a $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

preuve :

Définition

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont dites **semblables** si et seulement si il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$.

Proposition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

3 Théorèmes de diagonalisation

Théorème ** Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation **

Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.

preuve :

Théorème ** Condition suffisante de diagonalisation **

Une matrice carrée d'ordre n qui admet n valeurs propres distinctes est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

preuve :

Exercice 2 : Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 : *(Co-diagonalisation)* Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ telles que $AB = BA$ (*A et B commutent*).
On suppose que A admet n valeurs propres distinctes.
Montrer que tout vecteur propre de A est aussi vecteur propre de B.
En déduire que : $\exists P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

Théorème ** **Théorème spectral** (version 1) **

Toute matrice symétrique <u>réelle</u> est diagonalisable et n'a que des valeurs propres réelles.
Autrement dit, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que ${}^tA = A$ alors A est semblable à une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$.

preuve : résultat admis

Contre-exemple si A est symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Étude de $A = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix}$.

4 Méthode pratique de diagonalisation

a Méthode générale

La méthode générale pour diagonaliser une matrice A consiste à :

$*$ déterminer le spectre de A.
Pour cela, on écrit que λ est valeur propre de A si, et seulement si $A-\lambda I_n$ n'est pas inversible.
On utilise la méthode du pivot de Gauss pour échelonner la matrice $A-\lambda I_n$ puis on trouve les valeurs de λ pour lesquelles $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n)<n$, ce qui donne $\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$.

$*$ Pour tout k de $[\![1,p]\!]$, on cherche une base $\mathcal{B}_k$ du sous-espace propre E_{λ_k} associé à la valeur propre λ_k.
La juxtaposition, $\mathcal{B}=\bigcup\limits_{k=1}^{p}\mathcal{B}_k$ de ces bases est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
Si $\mathrm{card}(\mathcal{B})=n$, alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et A est diagonalisable. Sinon, A n'est pas diagonalisable.

$*$ Si A est diagonalisable, on écrit la matrice P obtenue en juxtaposant les matrice-colonnes de $\mathcal{B}$:
$P\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est inversible, et $D=P^{-1}AP$ est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de A dans l'ordre correspondant aux vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exercice 5 : Diagonaliser $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$.

b Cas particulier de la dimension 2

Une matrice carrée d'ordre 2 est inversible si, et seulement si son déterminant est non nul.
Soit $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. On a alors $\lambda\in Sp(A)\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{vmatrix}=0$.
Les valeurs propres de A sont donc les racines du trinôme $(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$.

Exercice 6 : Déterminer les valeurs propres de $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

c Quatre astuces pour le calcul des valeurs propres d'une matrice

(1) <u>Matrices carrées de taille 3</u>
Lorsqu'on échelonne $A-\lambda I_n$, après un premier pivot on obtient une matrice du type : $\begin{pmatrix}a&*&*\\0&f(\lambda)&g(\lambda)\\0&h(\lambda)&k(\lambda)\end{pmatrix}$
Si $a\neq 0$, alors : $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n)=1+\mathrm{rg}\begin{pmatrix}f(\lambda)&g(\lambda)\\h(\lambda)&k(\lambda)\end{pmatrix}$
et il suffit de calculer le déterminant $f(\lambda)\times k(\lambda)-g(\lambda)\times h(\lambda)$ pour conclure.
Exemple : Soit $M=\begin{pmatrix}3&1&-1\\2&2&-1\\4&2&-1\end{pmatrix}$. Alors :
$$\forall\lambda\in\mathbf{R},\ \mathrm{rg}(M-\lambda I_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}3-\lambda&1&\boxed{-1}\\2&2-\lambda&-1\\4&2&-1-\lambda\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}3-\lambda&1&\boxed{-1}\\\lambda-1&1-\lambda&0\\\lambda^2-2\lambda+1&1-\lambda&0\end{pmatrix}$$
donc $\mathrm{rg}(M-\lambda I_3)=1+\mathrm{rg}(N_\lambda)$ où $N_\lambda=\begin{pmatrix}\lambda-1&1-\lambda\\\lambda^2-2\lambda+1&1-\lambda\end{pmatrix}$.
$\det(N_\lambda)=(\lambda-1)(1-\lambda)-(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=-(\lambda-1)^2+(\lambda-1)^3=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$
donc $\det(N_\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda\in\{1,2\}$ et finalement : $\mathrm{Sp}(M)=\{1,2\}$.

(2) <u>Cas des matrices stochastiques (utiles en probabilités)</u>
Soit $A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Si $\exists s\in\mathbf{K}\mid\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=s$, alors en posant $X=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, on a : $AX=sX$.
On en déduit que s est valeur propre de A et X est un vecteur propre de A associé à s.
On admet que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres, donc si $\exists s\in\mathbf{K}\mid\forall j\in[\![1,n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=s$ alors s est aussi valeur propre de A mais on n'a pas de vecteur propre associé.

Exercice 7 : Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable ?

(3) Utilisation d'un polynôme annulateur *(Hors programme mais méthode à connaître).*
Il faut refaire en entier à chaque fois qu'on l'utilise.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ un polynôme tel que $P(A) = 0$: $\sum_{k=0}^{p} a_k A^k = 0$.
P est appelé **polynôme annulateur** de A.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $\exists X \neq 0_n \mid AX = \lambda X$ donc, par récurrence évidente, $\forall k \in [\![0, p]\!],\ A^k X = \lambda^k X$.
On obtient alors : $P(A)X = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k\right) X$. Comme $X \neq 0_n,\ P(A) = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k = 0$.
En résumé : si λ est valeur propre de A alors λ est une racine du polynôme P.
Autrement dit, les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de P.
En particulier, si A est nilpotente alors 0 est l'unique valeur propre de A.

Exercice 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de I_3 et de la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Après avoir calculé U^2, montrer que : $A^2 - 7A + 10I_3 = 0$. En déduire que : $\mathrm{Sp}(A) \subset \{2, 5\}$.

(4) Contrôle du résultat grâce à la trace *(Hors programme)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$.
C'est la somme des coefficients diagonaux de A.
La trace vérifie la propriété suivante : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
Ainsi, si A est diagonalisable et semblable à la matrice diagonale D, on a :
$$\mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(AP^{-1}P) = \mathrm{tr}(AI_n) = \mathrm{tr}(A)$$
La trace de A est donc égale à la somme des valeurs propres de A, en tenant compte de la dimension de leurs espace-propres associés.
Exemple : $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3+3+3 = 9$ et $2+2+5 = 9$ (tenir compte du fait que $\dim(E_2) = 2$).

III Applications de la diagonalisation

1 Puissances d'une matrice

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les puissances successives d'une matrice carrée.
L'une d'elles consiste à utiliser une matrice semblable diagonale :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ une matrice diagonale semblable à A.
Soit P la matrice carrée inversible telle que $A = PDP^{-1}$.
Alors : $\forall k \in \mathbf{N},\ A^k = PD^kP^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)P^{-1}$.

Exercice 9 : Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^k pour tout $k \in \mathbf{N}$.

2 Applications aux suites

a. Suites récurrentes croisées
On considère des suites définies par leurs premiers termes et une relation de dépendance linéaire entre les termes de rang $n+1$ et les termes de rang n.
On note X_n la matrice-colonne des termes de rang n. Alors il existe une matrice carrée A telle que : $\forall n \in \mathbf{N},\ X_{n+1} = AX_n$. On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N},\ X_n = A^n X_0$.
(Noter la similarité avec la formule des suites géométriques, mais **attention** à ne pas écrire X_0A^n qui n'a aucun sens !)
Il suffit donc de connaître A^n pour exprimer les termes généraux des suites en fonction de n et de leurs premiers termes.

Exercice 10 : Soit (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 4v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n \end{cases}$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbf{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

En déduire des expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Suites récurrentes linéaires

On considère une suite (u_n) définie par ses p premiers termes et une relation de récurrence linéaire entre $p+1$ termes consécutifs.

On pose U_n la matrice colonne de p termes consécutifs $u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+p-1}$ de la suite.

On explicite une matrice carrée A d'ordre p telle que $U_{n+1} = AU_n$.

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N},\ U_n = A^n U_0$.

On détermine A^n par exemple, en la diagonalisant.

Enfin, on calcule $U_n = A^n U_0$ pour exprimer u_n en fonction de n et des p premiers termes.

Exercice 11 : Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$

Déterminer le terme général u_n en fonction de n.

3 Équations matricielles

Soit (E) une équation d'inconnue une matrice M et qui dépend d'une matrice A.

Si A est diagonalisable alors on montre que M et A sont co-diagonalisables.

Puis, si A est semblable à une matrice diagonale D, alors on déduit de (E) une équation équivalente (E') qui dépend de D. On résout l'équation (E') et on déduit les solutions de (E) de celles de (E').

Exercice 12 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ l'équation $M^2 = A$.

4 Systèmes différentiels

On cherche n fonctions $x_1, \cdots, x_n$ dérivables sur $\mathbf{R}$ solutions d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre qui peut s'écrire sous la forme :

$\forall t \in \mathbf{R},\ X'(t) = AX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ et A est une matrice carrée d'ordre n.

Si A est diagonalisable alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ telle que $D = P^{-1}AP$.

On peut alors écrire que : $X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t)$.

On pose : $\forall t \in \mathbf{R},\ Y(t) = P^{-1}X(t)$.

Par linéarité de la dérivation, $\forall t \in \mathbf{R},\ Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ et donc $Y'(t) = DY(t)$.

Comme D est diagonale, les n équations de ce système sont toutes des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre et à coefficients constants, de la forme $y' = ay$.

On résout ces équations pour obtenir la matrice $Y(t)$.

Pour conclure, on calcule $X(t) = PY(t)$.

On remarque qu'il est inutile de calculer P^{-1}.

Exercice 13 : Résoudre dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})^3$ le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}$.