Programme de colles
Semaine 7 du 12/11 au 15/11/2024

Dénombrement - Probabilités discrètes

- p-listes d'un ensemble et nombre de p-listes
- p-listes sans répétition (arrangements) d'un ensemble et nombre d'arrangements
- permutations d'un ensemble et nombre de permutations
- p-combinaisons d'un ensemble et nombre de p-combinaisons
- Expérience aléatoire, univers Ω, événements, événement certain, événement impossible
- Notion de tribu $\mathcal{T}$ sur Ω (aucune question sur les tribus ne doit être posée)
- Événements incompatibles, système complet d'événements
- Système quasi-complet d'événements
- Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$
- Propriétés d'une propbabilité : $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$
- Pour des événements $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ 2 à 2 incompatibles, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathbf{P}(B_n)$ converge et $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B_n)$
- Cas d'équiprobabilité, probabilité uniforme
- Définition de la probabilité conditionnelle, notation $\mathbf{P}_A(B)$ ou $\mathbf{P}(B \mid A)$. $\mathbf{P}_A$ est une probabilité
- Formule des probabilités composées (conditionnements successifs)
- Formule des probabilités totales : si $(A_n)_n$ est un système quasi-complet d'événements, alors la série $\displaystyle\sum_n \mathbf{P}(A_n \cap B)$ est convergente et $\mathbf{P}(B) = \displaystyle\sum_n \mathbf{P}(A_n \cap B)$.

  Si de plus pour tout n, $\mathbf{P}(A_n) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(B) = \displaystyle\sum_n \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(B)$.
- Formule de Bayes
- Indépendance de 2 événements, indépendance mutuelle de n événements, d'une suite d'événements

Diagonalisation des matrices

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'une matrice carrée
- Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux.
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres disctinces est libre
- Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre
- Une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n
- Matrice diagonalisable
- Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n
- Une matrice carrée d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1

Questions de cours :

1. Définition d'une probabilité sur un univers Ω
2. Caractérisation d'une probabilité sur un univers Ω fini
3. Caractérisation d'une probabilité sur un univers Ω infini dénombrable
4. Définition d'une probabilité conditionnelle
5. Définition de l'indépendance de n événements
6. Formule des probabilités composées
7. Formule des probabilités totales
8. Formule de Bayes
9. Définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$
10. Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
11. Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
12. Définition d'une matrice diagonalisable
13. Condition sur les dimensions des sous-espaces propres pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable
14. Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice $n \times n$ quant au nombre de ses valeurs propres
15. Donner une condition d'inversibilité d'une matrice à l'aide de ses valeurs propres
16. Donner deux conditions suffisantes (non nécessaires) de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle