DM 5

On dispose d'une urne U contenant 4 boules blanches et 1 boule noire et d'une urne V contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.
On choisit une urne au hasard et on effectue alors **dans cette même urne** une suite infinie de tirages d'une boule avec remise. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :

- U « on tire dans l'urne U » et V « on tire dans l'urne V »,
- B_n « la n-ième boule tirée est blanche »,
- R_n « on obtient pour la première fois une boule noire au tirage n »,
- D_n « on obtient la seconde boule noire au tirage n ».

1. (a) Calculer les probabilités des événements B_1 et B_2.
   (b) Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

2. (a) Écrire une fonction `jeu()` qui renvoie le rang d'apparition de la première boule noire.
   (b) Écrire une fonction `rang_moyen()` qui renvoie une valeur approchée du rang moyen d'apparition de la première boule noire.
   (c) Écrire une fonction `probaR(n)` qui renvoie une valeur approchée de la probabilité de R_n.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathrm{P}_U(R_n)$ et $\mathrm{P}_V(R_n)$. En déduire $\mathrm{P}(R_n)$.
   (b) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{P}(R_n)$ est convergente et calculer sa somme. Interpréter ce résultat.

4. (a) Soit $n \geqslant 2$. Exprimer D_n à l'aide des événements R_k et B_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que
   $$\mathrm{P}_U(D_n) = (n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2$$
   et calculer de la même manière $\mathrm{P}_V(D_n)$. En déduire $\mathrm{P}(D_n)$.
   (c) Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \mathrm{P}(D_n)$ est convergente et calculer sa somme.