# Corrigé du DM 5

1. (a) D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(U, V)$ :
$$\mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}(U)\,\mathrm{P}_U(B_1) + \mathrm{P}(V)\,\mathrm{P}_V(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{7}{10}.$$
Par un calcul analogue, on trouve : $\mathrm{P}(B_2) = \dfrac{7}{10}$.
$$\boxed{\mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}(B_2) = \frac{7}{10}.}$$

   (b) Les événements $B_1$ et $B_2$ sont indépendants si $\mathrm{P}(B_1 \cap B_2) = \mathrm{P}(B_1) \times \mathrm{P}(B_2)$.
On calcule $\mathrm{P}(B_1 \cap B_2)$ à l'aide de la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(U, V)$ :
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B_1 \cap B_2) &= \mathrm{P}(U)\,\mathrm{P}_U(B_1 \cap B_2) + \mathrm{P}(V)\,\mathrm{P}_V(B_1 \cap B_2) \\ &= \mathrm{P}(U)\,\mathrm{P}_U(B_1)\,\mathrm{P}_U(B_2) + \mathrm{P}(V)\,\mathrm{P}_V(B_1)\,\mathrm{P}_V(B_2) \quad B_1 \text{ et } B_1 \text{ indépendants pour } P_U \text{ et } P_V \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$
Or
$$\mathrm{P}(B_1) \times \mathrm{P}(B_2) = \frac{49}{100} \neq \frac{1}{2}.$$
$$\boxed{\text{Les événements } B_1 \text{ et } B_2 \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

2. (a)
```python
import random as rd

def jeu():
    rang = 1
    if rd.random() < 1/2:    # choix de l'urne
        while rd.random() < 4/5: # tirage d'une boule blanche dans U
            rang += 1
    else:
        while rd.random() < 3/5: # tirage d'une boule blanche dans V
            rang += 1
    return rang
```

   (b)
```python
def rang_moyen():
    N = 1000
    somme = 0
    for _ in range(N):
        somme += jeu()
    return somme/N
```

   (c)
```python
def probaR(n):
    N =1000
    compteur = 0
    for _ in range(N):
        if jeu() == n:
            compteur += 1
    return compteur/N
```

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $R_n = B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B}_n$.
Les événements $B_1, \ldots, B_n$ étant indépendants pour la probabilité $\mathrm{P}_U$,

$$\mathrm{P}_U(R_n) = \mathrm{P}_U(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B}_n) = \mathrm{P}_U(B_1) \times \mathrm{P}_U(B_{n-1}) \times \mathrm{P}_U(\overline{B}_n) = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}.$$

De la même manière, on trouve : $\mathrm{P}_V(R_n) = \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$.
D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(U, V)$

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1,\ \mathrm{P}(R_n) = \frac{1}{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.}$$

(b) Pour $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(R_n)$ est une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques convergentes car $\left|\dfrac{4}{5}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{3}{5}\right| < 1$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{P}(R_n)$ est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(R_n) = \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{1-\frac{4}{5}} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} = 1$$

Les événements $(R_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux à deux incompatibles (la $\sigma$-additivité permet aussi de justifier la convergence de la série de terme général $\mathrm{P}(R_n)$) et tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(R_n) = 1$$

$$\boxed{\text{Les événements } (R_n)_{n\geqslant 1} \text{ forment un système quasi-complet d'événements.}}$$

4. (a) Soit $n \geqslant 2$. $D_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B}_n$.

(b) Soit $n \geqslant 2$. $D_n$ s'écrit sous forme d'union d'événements deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_U(D_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}_U(R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap \overline{B}_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{P}_U(R_k)\,\mathrm{P}_U(B_{k+1}) \ldots \mathrm{P}_U(B_{n-1})\,\mathrm{P}_U(\overline{B}_n) \quad \text{car } B_1, \ldots, B_n \text{ indépendants pour } \mathrm{P}_U \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 = (n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{5}\right)^2
\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que : $\mathrm{P}_V(D_n) = (n-1)\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-2} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$.
D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $(U, V)$

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 2,\ \mathrm{P}(D_n) = \frac{1}{50}(n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + \frac{2}{25}(n-1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}.}$$

(c) Pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{P}(D_n)$ est combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées premières convergentes car $\left|\dfrac{4}{5}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{3}{5}\right| < 1$. Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \mathrm{P}(D_n)$ est convergente et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{P}(D_n) &= \frac{1}{50}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2} + \frac{2}{25}\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{50} \times \frac{1}{(1-\frac{4}{5})^2} + \frac{2}{25} \times \frac{1}{(1-\frac{3}{5})^2} = \frac{25}{50} + \frac{2}{25} \times \frac{25}{4} = 1.
\end{aligned}$$

On peut aussi constater que les événements $(D_n)_{n\geqslant 2}$ sont deux à deux incompatibles et obtenir la convergence de la série de terme général $\mathrm{P}(D_n)$ par $\sigma$-additivité.

$$\boxed{\text{Les événements } (D_n)_{n\geqslant 2} \text{ forment eux aussi un système quasi-complet d'événements.}}$$