Exercice 5 : $(N+1)$ urnes de compositions différentes

1. On note, pour $k \in [\![0,N]\!]$, U_k l'événement "on a choisi l'urne k".
   On note, pour $i \in \mathbf{N}^\star$, B_i l'événement "on pioche une boule blanche au i-ème tirage".
   L'énoncé demande : $p_N = \mathbf{P}\left(B_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$.
   On utilise le système complet d'événements : $(U_k,\ k \in [\![0,N]\!])$.
   D'après la formule des probabilités totales, associée à ce système complet d'événements :
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(U_k) \times \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \,\middle|\, U_k\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1} \times \left(\frac{k}{N}\right)^n$$
   puisque le choix de l'urne est équiprobable donc : $\forall k \in [\![0,N]\!],\ \mathbf{P}(U_k) = \dfrac{1}{N+1}$
   et que, l'urne k étant choisie et contenant k boules blanches et N boules au total, on a :
   $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{P}(B_i|U_k) = \frac{k}{N}$$
   donc par indépendance des tirages **étant donnée l'urne k choisie**, on a :
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \,\middle|\, U_k\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i|U_k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$$
   Ainsi, par définition d'une probabilité conditionnelle : $p_N = \dfrac{\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i\right)}{\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)}$
   $$\text{donc : } p_N = \frac{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1} \times \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{N+1} \times \left(\frac{k}{N}\right)^{n}} = \frac{\frac{1}{N^{n+1}} \sum_{k=0}^{N} k^{n+1}}{\frac{1}{N^n} \sum_{k=0}^{N} k^n} = \frac{1}{N} \times \frac{\sum_{k=0}^{N} k^{n+1}}{\sum_{k=0}^{N} k^n}$$

2. **Limite de p_N**
   On montre d'abord le résultat : $\forall N \geqslant 1, \forall n \geqslant 1,\ \dfrac{N^{n+1}}{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^n \leqslant \dfrac{(N+1)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$
   Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction $t \longmapsto t^n$ est croissante et continue sur $\mathbf{R}_+$ donc :
   $$\int_{k-1}^{k} t^n \mathrm{d}t \leqslant k^n \leqslant \int_{k}^{k+1} t^n \mathrm{d}t$$
   On somme ces encadrements pour $k \in [\![1,N]\!]$. La relation de Chasles donne :
   $$\int_{0}^{N} t^n \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{N} k^n \leqslant \int_{1}^{N+1} t^n \mathrm{d}t$$
   Et il suffit enfin de calculer ces intégrales en utilisant une primitive : $t \longmapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.
   Posons $a_N = \dfrac{N^{n+1}}{n+1}$ et $b_N = \dfrac{(N+1)^{n+1}}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$
   $(N+1)^{n+1} = N^{n+1} \times \left(1 + \dfrac{1}{N}\right)^{n+1}$ et $\left(1 + \dfrac{1}{N}\right)^{n+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ car n est ici fixé
   donc $b_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \dfrac{N^{n+1}}{n+1} = a_N$. On en déduit que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^n \underset{N \to +\infty}{\sim} a_N$.
   Par opérations sur les équivalents, on a donc :
   $p_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{N} \times \dfrac{N^{n+2}}{n+2} \times \dfrac{n+1}{N^{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2}$.
   $$\text{Conclusion : } \boxed{\lim_{N \to +\infty} p_N = \frac{n+1}{n+2}.}$$

Exercice 8 : Séquence PPF lors de lancers d'une pièce

1. Soit $n \geqslant 3$. $A_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$ est une union d'événements 2 à 2 incompatibles.
   On a : $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1}$.
   Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, on pose F_k : "obtenir Face au lancer k".
   $B_{n+1} = \overline{A_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap \overline{F_n} \cap F_{n+1}$
   D'où : $\mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(\overline{A_{n-2}} \cap \overline{F_{n-1}} \cap \overline{F_n} \cap F_{n+1}\right)$
   $$= \mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}\left(\overline{A_{n-2}}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
   car les événements $\overline{A_{n-2}}$, $\overline{F_{n-1}}$, $\overline{F_n}$ et F_{n+1} sont indépendants par indépendance des lancers.
   D'où : $\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \mathbf{P}(A_{n+1}) = \mathbf{P}(A_n) + \frac{1}{8}\big(1 - \mathbf{P}(A_{n-2})\big).}$
2. Soit $n \geqslant 3$. On a : $A_n \subset A_{n+1}$, donc $\mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(A_{n+1}) \leqslant 1$.
   La suite $\big(\mathbf{P}(A_n)\big)_{n \geqslant 3}$ est croissante et majorée par 1, donc elle converge.
   Notons ℓ sa limite. Par passage à la limite dans l'égalité de la question 1 :
   $$\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell) \Leftrightarrow \ell = 1$$
   donc $\boxed{\big(\mathbf{P}(A_n)\big)_{n \geqslant 3} \text{ converge vers 1.}}$
3. Soit $n \geqslant 3$. $A_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$ est une union d'événements 2 à 2 incompatibles.
   Soit A l'événement : "obtenir la séquence PPF au cours de l'expérience".
   $A = \bigcup_{k=3}^{+\infty} B_k \quad \text{d'où} \quad A_n \subset A.$
   Alors : $\forall n \geqslant 3,\ \mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$.
   Par passage à la limite, $1 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$ c'est-à-dire $\mathbf{P}(A) = 1$.
   Donc : $\boxed{\text{on obtient presque sûrement la séquence PPF au cours de l'expérience.}}$