Exercice 2 : Puissances et inverse d'une matrice à paramètre

$a \in \mathbf{R}$, on pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = A + I$.

1. On a : $B = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}$ puis $\boxed{B^3 = 0.}$

   Soit $n \in \mathbf{N}$.
   Puisque $A = B - I$ et que B et I commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :
   $$A^n = (B - I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (-I)^{n-k}$$
   Si $n \geqslant 2$, dans cette somme les termes d'indices $k \geqslant 3$ sont nuls car : $\forall k \geqslant 3,\ B^k = 0$.
   $$\begin{aligned} \text{Il reste donc : } A^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} B^k (-I)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} B^0 (-I)^n + \binom{n}{1} B^1 (-I)^{n-1} + \binom{n}{2} B^2 (-I)^{n-2} \end{aligned}$$
   $$\boxed{A^n = (-1)^n I + nB + (-1)^n \frac{n(n-1)}{2} B^2}$$

2. On pose C la matrice obtenue en remplaçant n par -1 dans l'expression précédente.
   On a : $C = -I - B - B^2$.
   $$\begin{aligned} \text{Calculons } AC : \quad AC &= (B - I)(-I - B - B^2) \\ &= -B - B^2 - B^3 + I + B + B^2 \\ &= I \quad \text{car } B^3 = 0 \end{aligned}$$
   Ainsi, $\boxed{A \text{ est inversible, d'inverse } C = -I - B - B^2.}$

   On peut détailler : $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -a & -a \\ -1 & -1-a & -a \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}}$

Exercice 3 : Technique de diagonalisation

1. $A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{Sp}(A_1) = \{-1, 1\}$

   A_1 est diagonalisable car elle possède 2 valeurs propres distinctes, et semblable à la matrice diagonale $D_1 = \mathrm{Diag}(-1, 1)$.
   L'étude des espaces propres donne : $E_{-1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \mathrm{Sp}(A_2) = \{-1, 1, 2\}$

   A_2 est diagonalisable car elle possède 3 valeurs propres distinctes, et semblable à la matrice diagonale $D_2 = \mathrm{Diag}(-1, 1, 2)$.
   $E_{-1} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
   $$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A_3) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A_3 - \lambda I_2) < 2 &\Leftrightarrow A_3 - \lambda I_2 \text{ est non inversible} \\ &\Leftrightarrow \det(A_3 - \lambda I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda) - 1 \times (-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{donc } \boxed{\mathrm{Sp}(A_3) = \{1\}.} \end{aligned}$$
   A_3 ne possède qu'une valeur propre $\lambda = 1$ donc A_3 est diagonalisable ssi $A_3 = \lambda I_2 = I_2$, ce qui n'est pas le cas. $\boxed{A_3 \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\mathrm{Sp}(A_4) = \{1, 2\}$

   Rq : la somme de chaque ligne de A_4 vaut 1, donc on sait que $1 \in \mathrm{Sp}(A_4)$.

   $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\dim(E_1) = 2$, et puisque $\dim(E_2) \geqslant 1$, on sait déjà que $\dim(E_2) = 1$ et que A_4 est diagonalisable, semblable à $D_4 = \mathrm{Diag}(1, 1, 2)$.

   $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ donc $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ A_5 est triangulaire donc $\mathrm{Sp}(A_5) = \{-2, 2\}$

   A_5 est diagonalisable car elle possède 2 valeurs propres distinctes, et semblable à la matrice diagonale $D_5 = \mathrm{Diag}(-2, 2)$.

   $E_{-2} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   A_6 est symétrique à coefficients réels, donc $\boxed{A_6 \text{ est diagonalisable}}$.

   Rq : la somme de chaque ligne de A_6 vaut -3, donc $-3 \in \mathrm{Sp}(A_6)$, et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-3}$.

   Il faut cependant faire l'étude complète pour trouver toutes les VAP et des bases des espaces propres.

   • **Étude du spectre de A_6 :**

   $\lambda \in \mathrm{Sp}(A_6) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A_6 - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} < 3$

   $$\mathrm{rg}(A_6 - \lambda I_3) \underset{\substack{L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-1 & 2 \\ \boxed{2} & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 - (\lambda-1)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 6-2\lambda & -\lambda^2+2\lambda+3 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \\ \boxed{2} & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

   option 1 : on utilise la matrice extraite $B_\lambda = \begin{pmatrix} 6-2\lambda & -\lambda^2+2\lambda+3 \\ \lambda-3 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

   $\mathrm{rg}(A_6 - \lambda I_3) = 1 + \mathrm{rg}(B_\lambda)$ et $\mathrm{rg}(B_\lambda) < 2 \Leftrightarrow \det(B_\lambda) = 0$

   $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (6-2\lambda)(3-\lambda) - (-\lambda^2+2\lambda+3)(\lambda-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda-3)(2\lambda-6+\lambda^2-2\lambda-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda^2-9) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda-3)^2(\lambda+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -3 \qquad \text{donc } \boxed{\mathrm{Sp}(A_6) = \{-3, 3\}.} \end{aligned}$$

   option 2 : on remarque que $\lambda - 3$ est en facteur dans les lignes 1 et 2 :

   <u>Premier cas : $\lambda = 3$</u>

   $\mathrm{rg}(A_6 - 3I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 < 3$ $\quad$ donc $3 \in \mathrm{Sp}(A_6)$.

   <u>Deuxième cas : $\lambda \neq 3$</u> $\quad$ on peut donc diviser par $\lambda - 3$

   $$\mathrm{rg}(A_6 - 3I_3) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{\lambda-3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda-3}L_2}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -\lambda-1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ \boxed{2} & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda-3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ \boxed{2} & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

   donc $\mathrm{rg}(A_6 - 3I_3) < 3 \Leftrightarrow -\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$ $\quad$ donc $-3 \in \mathrm{Sp}(A_6)$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A_6) = \{-3, 3\}.}$

• **Étude des espaces propres :**

On est mieux avancé avec l'option 2 :

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_3 \Leftrightarrow \begin{cases}0=0\\ 0=0\\ 2x+2y+2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-y-z\\ y=y\\ z=z\end{cases} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} -y-z\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X=y\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

donc $E_3=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{-3} \Leftrightarrow \begin{cases}0=0\\ y-z=0\\ 2x+2y-4z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=z\\ y=z\\ z=z\end{cases} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} z\\ z\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

donc $E_{-3}=\text{Vect}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

• **Matrice de passage :**

A_6 est semblable à $D_6=\text{Diag}(3,3,-3)$ et $A_6=P_6D_6P_6^{-1}$ avec $P_6=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

7. $A_7=\begin{pmatrix} -3 & 5\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $\quad$ A_7 est triangulaire donc $\text{Sp}(A_5)=\{-3,2\}$

   A_7 est diagonalisable car elle possède 2 valeurs propres distinctes, et semblable à la matrice diagonale $D_7=\text{Diag}(-3,2)$.

   $E_{-3}=\text{Vect}\begin{pmatrix} 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $E_2=\text{Vect}\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$ donc $P_7=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

8. $A_8=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2\\ -3 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\text{Sp}(A_8)=\{-1,1\}$

   $E_{-1}=\text{Vect}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $\quad E_1=\text{Vect}\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

   $\dim(E_{-1})+\dim(E_1)=1+1=2<3$ donc A_8 n'est pas diagonalisable.

   Inversibilité : toutes les matrices $A_1\dots A_8$ sont inversibles car 0 n'est jamais VAP.

Exercice 5 : Suite récurrente linéaire d'ordre 3

1. Expression matricielle de la relation de récurrence

   On pose : $\boxed{A=\begin{pmatrix} 6 & -11 & 6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}$

   On vérifie que d'après la définition du produit matriciel : $\boxed{\forall n\in\mathbf{N},\ U_{n+1}=AU_n.}$

2. Expression de U_n en fonction de U_0

   Pour $n\in\mathbf{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: "$U_n=A^nU_0$".

   ∗ initialisation au rang $n=0$: $A^0U_0=I_3U_0=U_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   ∗ hérédité à partir du rang $n=0$:

   Soit $n\geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   Alors : $U_{n+1}=AU_n=A(A^nU_0)$ $\quad$ d'après $\mathcal{P}(n)$

   $\qquad\qquad=A^{n+1}U_0$ $\quad$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   ∗ conclusion : d'après le principe de récurrence, $\forall n\geqslant 0,\ \mathcal{P}(n)$ est vraie.

3. Diagonalisation de la matrice A

• **Recherche du spectre de A :**

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3$

$$\Leftrightarrow \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6-\lambda & -11 & 6 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} < 3$$

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 6-\lambda & -11 & 6 \\ \boxed{1} & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - (6-\lambda)L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2+6\lambda-11 & 6 \\ \boxed{1} & -\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - (-\lambda^2+6\lambda-11)L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & f(\lambda) \\ \boxed{1} & -\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\lambda \end{pmatrix}$$

où $f(\lambda) = 6 + \lambda(-\lambda^2 + 6\lambda - 11) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 5\lambda - 6) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

Remarque : on peut repérer $\lambda = 1$ racine évidente du polynôme $f(\lambda)$, mais on peut aussi repérer que la somme des lignes de A vaut 1 donc $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.

On trouve donc : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, 3\}}$ donc $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$ car elle possède 3 VAP distinctes.

• **Étude des espaces propres :**

$E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1$, et $\dim(E_1) = 1$.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 4z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x - 3y = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9z \\ y = 3z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 9z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

• **Matrice de passage :**

A est semblable à $D = \mathrm{Diag}(1, 2, 3)$ et $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Inverse de la matrice de passage

$$(P \,|\, I_3) \ : \ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -L_3 + L_2}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

donc $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}}$

5. <u>Expression de u_n en fonction de n</u>

$A = PDP^{-1}$ donc par récurrence immédiate : $\forall n \geqslant 0,\ A^n = PD^nP^{-1}$
avec $D^n = \mathrm{Diag}(1,2,3)$ donc $D^n = \mathrm{Diag}(1, 2^n, 3^n)$.
D'après la question 2, $U_n = PD^nP^{-1}U_0$ et u_n est le coefficient de la 3-ème ligne de U_n.

On calcule ce coefficient en sachant que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\ PD^n = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ -2 & 8 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{avec} \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(1 - 2^{n+1} + 3^n) \\ b_n = \frac{1}{2}(-5 + 2^{n+3} - 3^{n+1}) \\ c_n = 3 - 3.2^n + 3^n \end{cases}$$

Enfin :

$$U_n = \begin{pmatrix} * \\ * \\ u_n \end{pmatrix} = PD^nP^{-1}U_0 = a_n + c_n \quad \text{donc} \boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = \frac{1}{2}\big(- 2^{n+3} + 3^{n+1} + 7\big).}$$