TD 6 : Matrices - Diagonalisation

1 Exercices d'application directe du cours

1 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A + I$.

1. Calculer B^3. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. A est-elle inversible ? si oui, calculer A^{-1}.

3 Rechercher les valeurs propres des matrices suivantes, déterminer les matrices diagonalisables, inversibles, et donner le cas échéant une matrice de passage :

1. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2 Exercices classiques

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit A et B deux matrices carrées de taille n . On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que l'on a $AB = BA$.
   (a) Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.
   (b) En déduire l'existence d'une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres communs à A et B.
2. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.
   On précisera une matrice P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. On souhaite résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que A et M commutent.
   (b) Montrer que $M^3 = A \Leftrightarrow N^3 = D$ où N est une matrice que l'on explicitera.
   (c) Conclure.

5 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad u_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
3. Déterminer une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Calculer P^{-1}.
5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

$\boxed{6}$ On considère le système différentiel :

$$(\mathcal{S})\ \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 7y(t) + 5z(t) \\ y'(t) = -4x(t) - 8y(t) - 5z(t) \\ z'(t) = 4x(t) + 4y(t) + z(t) \end{cases}$$

où $x, y, z \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

   Déterminer la matrice A telle que le système différentiel $(\mathcal{S})$ soit équivalent à $X'(t) = AX(t)$.
2. Diagonaliser la matrice A et préciser une matrice P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. On effectue le changement de fonctions $Y(t) = P^{-1}X(t)$ où l'on pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $(\mathcal{S})$ équivaut à $Y'(t) = DY(t)$ puis résoudre le système différentiel $(\mathcal{S})$.

TD 7 : Variables aléatoires réelles discrètes

1 Exercices d'application directe du cours

$\boxed{1}$ *Tirages sans remise.*
Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire une à une l'ensemble des boules.
Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la k-ième boule tirée.

1. Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_2, puis celle de X_k pour $k \in [\![1;n]\!]$.
2. Écrire une fonction `Python` simulant informatiquement une réalisation de X_k.

$\boxed{2}$ Dans une entreprise de 100 personnes dont 30 femmes, on choisit au hasard une équipe de 5 joueurs (ou joueuses) pour participer à une compétition de basket. Déterminer la loi du nombre de femmes dans l'équipe.

$\boxed{3}$ On considère une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(2n,p)$.
Donner la loi de $Y=(X-n)^2$ puis calculer son espérance en utilisant l'espérance et la variance de X.

$\boxed{4}$ On lance indéfiniment un dé équilibré à p faces numérotées de 1 à p ($p \geqslant 2$).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « obtenir une seconde fois 1 lors du n-ième lancer ».

1. Déterminer $a_n = \mathrm{P}(A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\sum \mathrm{P}(A_n)$ et calculer sa somme.
2. Que peut-on en déduire sur le système d'évènements $(A_n)_{n \geqslant 2}$?

$\boxed{5}$ Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X=k) = \frac{p^k}{(p+1)^{k+1}},$$

où $p>0$ est le prix de la campagne publicitaire.

1. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour X.
2. Reconnaître la loi de $X+1$. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Connaissant son stock s, déterminer la probabilité de rupture de stock.

2 Exercices classiques

$\boxed{6}$ On effectue n lancers successifs d'une pièce qui donne Face avec la probabilité p. On note X le nombre de Face obtenus. Calculer l'espérance de la variable $Z = 1/(X+1)$.

$\boxed{7}$ Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Calculer $\mathrm{E}(X+1)$ et $\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$, puis vérifier que $\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) \geqslant \frac{1}{\mathrm{E}(X+1)}$. L'égalité est-elle possible ?

$\boxed{8}$ Une urne contient 2 boules rouges et $n-2$ boules blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit X_n le rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Calculer $e_n = \mathrm{E}(X_n)$. Donner un équivalent simple de e_n quand n tend vers $+\infty$.

$\boxed{9}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;n]\!]$.
Montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X \geqslant k).$$

$\boxed{10}$ Une urne contient une proportion p de boules noires et une proportion $q=1-p$ de boules blanches.
On effectue des tirages avec remise d'une boule dans cette urne jusqu'à obtenir des boules des deux couleurs.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Trouver la loi de X et vérifier que $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X=k) = 1$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

$\boxed{11}$ Soit n un entier naturel supérieur à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On réalise des tirages successifs sans remise. On arrête lorsque le numéro de la boule tirée est supérieur au numéro du tirage précédent. X est le nombre de tirages effectués.

1. Expliciter l'événement $[X > k]$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ puis donner sa probabilité.
2. Déterminer alors la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.
4. Écrire une fonction `Python` simulant informatiquement une réalisation de X.

$\boxed{12}$ Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N.

1. On tire simultanément un échantillon de n jetons. Soit X le plus grand des numéros de cet échantillon.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Montrer la formule de Pascal :
   $$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$
   On pourra raisonner par récurrence sur N.
   (c) En déduire l'espérance de X.
   (d) Calculer l'espérance de $X(X+1)$ et en déduire la variance de X.
2. On tire, avec remise, un à un n jetons. Soit X le plus grand des numéros de cet échantillon.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) En déduire la loi de X, puis exprimer son espérance en fonction de la somme $\sum\limits_{k=1}^{N} k^n$.

$\boxed{13}$ Une personne joue à un jeu dont les questions sont de plus en plus difficiles.
La probabilité de répondre juste à la n-ième question est $1/n$. Le jeu s'arrête dès qu'une réponse est fausse.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de questions posées au cours du jeu.
2. Calculer son espérance et sa variance.

$\boxed{14}$ On lance cinq dés. On met de côté les dés avec lesquels on a obtenu un as et on relance les autres. On répète l'opération jusqu'à ce qu'on ait obtenu cinq as, et on note X le nombre de telles opérations effectuées. Trouver la loi de X en commençant par déterminer $\mathrm{P}(X \leqslant n)$ pour tout entier naturel non nul n.
Indication : on peut numéroter les dés et noter X_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers du dé numéro i pour obtenir un as.

$\boxed{15}$ Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On considère la variable aléatoire Y définie par :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } X(\omega) \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Donner la loi de Y. Montrer en particulier que
$$\mathrm{P}(Y = 0) = \frac{1 + 2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{2}.$$
2. Calculer l'espérance de Y.
3. Calculer l'espérance de $2Y(2Y-1)$ et en déduire la variance de Y.

TD 8 : Polynômes

1 Soit n un entier naturel. On considère les polynômes $P = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ et $Q = X^2 - X + 1$ et on pose $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que $-j$ est racine de Q.
2. En déduire que le polynôme P se factorise par le polynôme Q.

2 Soit n un entier naturel.
Déterminer le degré du polynôme $P = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.

3 Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = 2X^3 - 14X + 12$,
2. $Q = -X^7 + 6X^6 - 10X^5 + 11X^3 - 6X^2$,
3. $R = iX^5 + \sqrt{3} + i$,
4. $S = X^4 + X^2 + 1$,
5. $T = X^4 + X^3 + X + 1$.

4 On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} P_0 = X^3 - \frac{5}{2}X^2 + \frac{3}{2} \\ \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+1} = (X-1)\big[2XP_n + 3(X^{2n+4} - 1)\big]. \end{cases}$$

1. Factoriser P_0.
2. (a) Montrer que $P_1 = 5X^5 - 10X^4 + 5X^3 + 3X^2 - 6X + 3$.
   (b) Montrer que 1 est racine de P_1 et déterminer sa multiplicité.
   (c) On pose $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$. Factoriser P_1 dans $\mathbf{C}$.
3. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, 1 est racine de multiplicité au moins 2 de P_n.
4. (a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ \deg(P_n) \leqslant 2n+3$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe donc un réel c_n et un polynôme R_n vérifiant $\deg(R_n) < 2n+3$ tels que :
   $$P_n = c_n X^{2n+3} + R_n.$$
   Montrer alors que pour $n \in \mathbf{N}$, $c_{n+1} = 2c_n + 3$.
   (c) Exprimer c_n en fonction de n.
   (d) En déduire, pour $n \in \mathbf{N}$, le degré de P_n.
5. Déterminer, pour $n \geqslant 1$, la valeur de $P_n(0)$.

TD 10 : Intégrales généralisées

1 Exercices d'application directe du cours

1 Étudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer le cas échéant (une méthode est parfois précisée, et les résultats sont donnés) :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}} = 2$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|+t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\,t^2+2\,t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{3/2}\sqrt{2\pi}}{2}$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 4x\,e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 1$ (IPP)
8. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \ln 2$
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \pi$

2 Exercices classiques

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide d'un changement de variable, montrer qu'il existe un réel K tel que $f(x) = K\,x$ où K est une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer. *On pourrait montrer que* $K = \pi/2$.
4. En déduire $f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

4 On définit la fonction *Gamma* par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $\Gamma(x)$ existe.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.