TD 7 : Variables aléatoires réelles discrètes

1 Exercices d'application directe du cours

1 *Tirages sans remise.*
Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On tire une à une l'ensemble des boules.
Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la k-ième boule tirée.

1. Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_2, puis celle de X_k pour $k \in [\![1; n]\!]$.
2. Écrire une fonction `Python` simulant informatiquement une réalisation de X_k.

2 Dans une entreprise de 100 personnes dont 30 femmes, on choisit au hasard une équipe de 5 joueurs (ou joueuses) pour participer à une compétition de basket. Déterminer la loi du nombre de femmes dans l'équipe.

3 On considère une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$.
Donner la loi de $Y = (X - n)^2$ puis calculer son espérance en utilisant l'espérance et la variance de X.

4 On lance indéfiniment un dé équilibré à p faces numérotées de 1 à p ($p \geqslant 2$).
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « obtenir une seconde fois 1 lors du n-ième lancer ».

1. Déterminer $a_n = \mathrm{P}(A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\sum \mathrm{P}(A_n)$ et calculer sa somme.
2. Que peut-on en déduire sur le système d'évènements $(A_n)_{n \geqslant 2}$?

5 Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(X = k) = \frac{p^k}{(p+1)^{k+1}},$$

où $p > 0$ est le prix de la campagne publicitaire.

1. Vérifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour X.
2. Reconnaître la loi de $X + 1$. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Connaissant son stock s, déterminer la probabilité de rupture de stock.

2 Exercices classiques

6 On effectue n lancers successifs d'une pièce qui donne Face avec la probabilité p. On note X le nombre de Face obtenus. Calculer l'espérance de la variable $Z = 1/(X + 1)$.

7 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Calculer $\mathrm{E}(X + 1)$ et $\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$, puis vérifier que $\mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) \geqslant \frac{1}{\mathrm{E}(X+1)}$. L'égalité est-elle possible ?

8 Une urne contient 2 boules rouges et $n - 2$ boules blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. Soit X_n le rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Calculer $e_n = \mathrm{E}(X_n)$. Donner un équivalent simple de e_n quand n tend vers $+\infty$.

9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0; n]\!]$.
Montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X \geqslant k).$$

10 Une urne contient une proportion p de boules noires et une proportion $q = 1 - p$ de boules blanches.
On effectue des tirages avec remise d'une boule dans cette urne jusqu'à obtenir des boules des deux couleurs.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Trouver la loi de X et vérifier que $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathrm{P}(X = k) = 1$.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

$\boxed{11}$ Soit n un entier naturel supérieur à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On réalise des tirages successifs sans remise. On arrête lorsque le numéro de la boule tirée est supérieur au numéro du tirage précédent. X est le nombre de tirages effectués.

1. Expliciter l'événement $[X > k]$ pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ puis donner sa probabilité.
2. Déterminer alors la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.
4. Écrire une fonction `Python` simulant informatiquement une réalisation de X.

$\boxed{12}$ Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N.

1. On tire simultanément un échantillon de n jetons. Soit X le plus grand des numéros de cet échantillon.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Montrer la formule de Pascal :
   $$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$
   On pourra raisonner par récurrence sur N.
   (c) En déduire l'espérance de X.
   (d) Calculer l'espérance de $X(X+1)$ et en déduire la variance de X.
2. On tire, avec remise, un à un n jetons. Soit X le plus grand des numéros de cet échantillon.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
   (b) En déduire la loi de X, puis exprimer son espérance en fonction de la somme $\sum\limits_{k=1}^{N} k^n$.

$\boxed{13}$ Une personne joue à un jeu dont les questions sont de plus en plus difficiles.
La probabilité de répondre juste à la n-ième question est $1/n$. Le jeu s'arrête dès qu'une réponse est fausse.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de questions posées au cours du jeu.
2. Calculer son espérance et sa variance.

$\boxed{14}$ On lance cinq dés. On met de côté les dés avec lesquels on a obtenu un as et on relance les autres. On répète l'opération jusqu'à ce qu'on ait obtenu cinq as, et on note X le nombre de telles opérations effectuées. Trouver la loi de X en commençant par déterminer $\mathrm{P}(X \leqslant n)$ pour tout entier naturel non nul n.
Indication : on peut numéroter les dés et noter X_i la variable aléatoire égale au nombre de lancers du dé numéro i pour obtenir un as.

$\boxed{15}$ Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On considère la variable aléatoire Y définie par :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{X(\omega)}{2} & \text{si } X(\omega) \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } X(\omega) \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Donner la loi de Y. Montrer en particulier que
   $$\mathrm{P}(Y=0) = \frac{1 + 2e^{-\lambda} - e^{-2\lambda}}{2}.$$
2. Calculer l'espérance de Y.
3. Calculer l'espérance de $2Y(2Y-1)$ et en déduire la variance de Y.