TD 8 : Polynômes

$\boxed{1}$ Soit n un entier naturel. On considère les polynômes $P = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ et $Q = X^2 - X + 1$ et on pose $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrer que $-j$ est racine de Q.
2. En déduire que le polynôme P se factorise par le polynôme Q.

$\boxed{2}$ Soit n un entier naturel.
Déterminer le degré du polynôme $P = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.

$\boxed{3}$ Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = 2X^3 - 14X + 12$,
2. $Q = -X^7 + 6X^6 - 10X^5 + 11X^3 - 6X^2$,
3. $R = iX^5 + \sqrt{3} + i$,
4. $S = X^4 + X^2 + 1$,
5. $T = X^4 + X^3 + X + 1$.

$\boxed{4}$ On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} P_0 = X^3 - \frac{5}{2}X^2 + \frac{3}{2} \\ \forall\, n \in \mathbf{N}, \quad P_{n+1} = (X-1)\big[2XP_n + 3(X^{2n+4} - 1)\big]. \end{cases}$$

1. Factoriser P_0.
2. (a) Montrer que $P_1 = 5X^5 - 10X^4 + 5X^3 + 3X^2 - 6X + 3$.
   (b) Montrer que 1 est racine de P_1 et déterminer sa multiplicité.
   (c) On pose $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$. Factoriser P_1 dans $\mathbf{C}$.
3. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, 1 est racine de multiplicité au moins 2 de P_n.
4. (a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ \deg(P_n) \leqslant 2n+3$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe donc un réel c_n et un polynôme R_n vérifiant $\deg(R_n) < 2n+3$ tels que :
   $$P_n = c_n X^{2n+3} + R_n.$$
   Montrer alors que pour $n \in \mathbf{N}$, $c_{n+1} = 2c_n + 3$.
   (c) Exprimer c_n en fonction de n.
   (d) En déduire, pour $n \in \mathbf{N}$, le degré de P_n.
5. Déterminer, pour $n \geqslant 1$, la valeur de $P_n(0)$.