TD 9 : Espaces vectoriels

1 Exercices d'application directe du cours

1 Quels sont les espaces vectoriels parmi les ensembles suivants ?

1. E_1 ensemble des couples de réels (x, y) tels que $x = y$.
2. E_2 ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg P \geqslant 2$.
3. E_3 ensemble des solutions de l'équation différentielle $-x^2\, y'' + (x+1)\, y' - 4\, y = 0$
4. E_4 ensemble des solutions de l'équation différentielle $-x^2\, y'' + (x+1)\, y' - 4\, y = \sin x$

2
1. Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :
   - $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$,
   - $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - y + 3z = 0\}$,
   - $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ 2x - y + 3z = 0\}$.
2. Déterminer des équations du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par : $H = \operatorname{Vect}\big((-1, 2, 1, -1), (3, 1, 0, -1)\big)$.

3 Soit (u, v, w) une base d'un espace vectoriel E. Déterminer le rang des familles suivantes et reconnaître les familles libres, les familles génératrices et les bases de E :

1. $(u; u - 2v + w; -v + w)$
2. $(u - v; v - w; w - u)$
3. $(-u; u - 2v + w)$
4. $(u; u + v; u + v + w)$
5. $(u + v; u + w; w - v)$
6. $(-u + v + w; u - v + w; u + v - w)$
7. $(v; w; u)$
8. $(u - v; v - u; w - v; v - u)$

2 Exercices classiques

4 Soit E un espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base.
La famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \ldots, e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$ est-elle une base de E ?

5 Déterminer le rang de la famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_5)$ de $\mathbb{R}^4$ en discutant suivant la valeur des paramètres réels a et b, puis donner une base du sous-espace engendré par ces vecteurs :

$$e_1 = (a, -1, -1, 1),\ e_2 = (-a, a, 1, -1),\ e_3 = (1, b, 1, 0),\ e_4 = (1, b, a, b),\ e_5 = (1, -1, -a, 1).$$

6 On considère les polynômes $P_1 = -2X^2 + X + 1$, $P_2 = X^2 + 3X + 1$ et $P_3 = -2X^2 + X + 3$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = -X^2 + 4X$ dans cette base.

7
1. Montrer que les polynômes 1, $X - 1$, $(X - 1)^2$ forment une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Soit le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c réels.
2. Quelles sont les coordonnées du polynôme Q défini par $Q(X) = P(X - 1)$ dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. Même question avec le polynôme R défini par $R(X) = P(X + 1)$.

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme réel de degré n. Montrer que $(P, P', P'', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

9
1. Rappeler la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et la dimension de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Donner les coordonnées de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_c$ et dans la base $\mathcal{B}$.

10 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞.
Pour α réel strictement positif, on note F_α l'ensemble des fonctions de E de la forme $x \mapsto P(x)\, e^{\alpha x} + Q(x)\, e^{-\alpha x}$ où P et Q sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

1. Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère les fonctions $f_1 : x \mapsto e^{\alpha x}$, $f_2 : x \mapsto xe^{\alpha x}$, $f_3 : x \mapsto e^{-\alpha x}$ et $f_4 : x \mapsto xe^{-\alpha x}$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F_α. En déduire la dimension de F_α.
3. Étant donné $f \in F_\alpha$, déterminer les coordonnées de f et de f' dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{11}$ On considère l'ensemble E défini par :

$$E = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \right\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer la dimension de E.
3. Montrer que E est stable par produit matriciel et que tous les éléments de E commutent.

$\boxed{12}$ Soit a un réel fixé et l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(a) = P'(a) = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de F puis préciser sa dimension.

3 Autre exercice

$\boxed{13}$ Soit f_1 et f_2 les deux applications définies par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = \cos x$.
Dans l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit E le sous-espace vectoriel engendré par f_1 et f_2.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrer que les deux applications $g_1 : x \mapsto \cos^2 \dfrac{x}{2}$ et $g_2 : x \mapsto \sin^2 \dfrac{x}{2}$ engendrent aussi E.
3. L'application $g : x \mapsto \sin x$ appartient-elle à E ?