TD 10 : Intégrales généralisées

1 Exercices d'application directe du cours

1 Étudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer le cas échéant (une méthode est parfois précisée, et les résultats sont donnés) :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}} = 2$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\,\ln t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|+t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\,t^2+2\,t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{3/2}\sqrt{2\pi}}{2}$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 4x\,e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 1$ (IPP)
8. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \ln 2$
10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \pi$

2 Exercices classiques

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad \text{et} \quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,dt.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est paire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. À l'aide d'un changement de variable, montrer qu'il existe un réel K tel que $f(x) = K\,x$ où K est une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer. *On pourrait montrer que* $K = \pi/2$.
4. En déduire $f(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

4 On définit la fonction *Gamma* par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $\Gamma(x)$ existe.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\forall\, x \geqslant 1, \quad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.