Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et $I =]0; +\infty[$.

Partie 1

Soit φ une fonction continue sur I donnée. Soit g_n la fonction définie sur I par :

$$g_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \varphi(tx)\,\mathrm{d}t.$$

1. On suppose que la fonction φ est déjà programmée en `Python` sous le nom `phi`. Programmer alors une fonction `g(n,x)` prenant en entrée un entier `n`, un flottant `x`, et retournant en sortie une valeur approchée de $g_n(x)$ calculée par la méthode des rectangles avec 100 rectangles.

2. **a)** Soit $x \in I$. Montrer que $g_n(x) = x^n \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, g_n est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

c) Calculer $g_n'(x)$ pour x dans I (on ne cherchera pas à simplifier le résultat), et en déduire que pour tout entier n, g_n est solution sur I de l'équation différentielle (D_n) suivante :

$$y' - \frac{n}{x}y = x^n\varphi(x) \qquad (D_n)$$

3. Dans toute la suite du problème, φ est la fonction donnée par $\varphi(x) = xe^x$.

a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (D_n) sur I.

b) Soit $x > 0$. Calculer par intégration par parties : $\int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u$.

c) En déduire les solutions de (D_n) sur I.

d) Vérifier que la solution de (D_n) vérifiant de plus la condition initiale $y(1) = 0$ est la fonction f_n définie sur I par :

$$f_n(x) = x^n(x-1)e^x.$$

Partie 2

Dans cette partie, on étudie pour tout entier $n > 0$ l'équation (E_n) suivante :

$$f_n(x) = 1 \qquad (E_n)$$

où f_n est la fonction donnée à la question **3.d)** de la **Partie 1**.

1. **a)** Justifier que f_n est dérivable et vérifier que :

$$\forall x \in I \quad f_n'(x) = x^{n-1}P_n(x)e^x \quad \text{où} \quad P_n(x) = x^2 + nx - n.$$

b) Vérifier que P_n possède deux racines réelles distinctes α_n et β_n telles que :

$$\alpha_n \leq 0 \leq \beta_n \leq 1.$$

c) En déduire le tableau de variations complet de f_n sur I (*on ne cherchera pas à calculer la valeur de $f_n(\beta_n)$*).

d) Démontrer que pour tout entier naturel $n > 0$, l'équation (E_n) admet une unique solution dans I notée x_n dans la suite, et établir que $x_n > 1$.

2. **a)** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $f_{n+1}(x_n) \geq 1$.

   b) En déduire le sens de variation de la suite (x_n).

   c) Montrer que la suite (x_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.

3. Dans cette question on souhaite prouver que $\ell = 1$.

   a) Montrer que $\ell \geq 1$.

   b) On suppose que $\ell > 1$. En partant du fait que $(x_n - 1)e^{x_n} = \dfrac{1}{x_n^n} > 0$, aboutir à une contradiction et conclure.

4. Dans cette question, on souhaite trouver un équivalent de $x_n - 1$. Pour cela, on introduit la suite (ε_n) définie par :

$$x_n = 1 + \varepsilon_n \quad (\textit{on a donc } \varepsilon_n > 0 \textit{ d'après } \mathbf{2.a)})$$

   a) Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$n \ln(1 + \varepsilon_n) + \ln \varepsilon_n + 1 + \varepsilon_n = 0.$$

   b) Montrer alors que : $n\varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\sim} -\ln \varepsilon_n$. En déduire la limite de $n\varepsilon_n$ en $+\infty$.

   c) En remarquant que :

$$\frac{\ln n}{\ln \varepsilon_n} = \frac{\ln(n\varepsilon_n)}{n\varepsilon_n} \times \frac{n\varepsilon_n}{\ln \varepsilon_n} - 1,$$

   montrer que $\ln \varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\sim} -\ln n$.

   d) Donner enfin un équivalent de $x_n - 1$.