Équations différentielles – Suites

Le Samedi 5 octobre 2024 (2h)

DS1
Corrigé

Problème

Partie 1

1. La méthode des rectangles consiste en le calcul d'une somme de Riemann. Ce qui donne (la variable d'intégration est t) :

```python
def g(n,x):
    h = 1/100
    S,t = 0,0
    for k in range(100): # 100 tours de  boucle, donc 100 rectangles
    S+=h*phi(x*t)        # incrément = aire du k-eme rectangle
        t+=h
    return x**(n+1)*S
```

2. **a)** Soit $x > 0$. Comme x est non nul, on peut poser dans l'intégrale $g_n(x)$ le changement de variables affine $u = tx$, ce qui donne :

$$g_n(x) = x^{n+1}\int_0^{1\cdot x}\varphi(u)\frac{\mathrm{d}u}{x} = x^n\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u$$

c'est bien le résultat demandé.

b) Considérons la nouvelle expression de $g_n(x)$ obtenue à la question précédente. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^1$, et par définition, $\Phi : x \mapsto \int_0^x \varphi(u)\mathrm{d}u$ désigne une primitive de φ (la seule qui soit nulle en 0). Comme $\Phi' = \varphi$, et que φ est continue, Φ est $\mathscr{C}^1$ sur I. Ainsi, g_n est bien $\mathscr{C}^1$ en tant que produit de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I.

c) Soit $x \in I$. Par règles de calculs sur la dérivation, et par définition de primitive, en dérivant l'expression obtenue en **2.** on obtient :

$$\forall x \in I \quad g_n'(x) = nx^{n-1}\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u + x^n\varphi_n(x) \overset{\textbf{2.a)}}{=} \frac{n}{x}g_n(x) + x^n\varphi(x)$$

ce qui donne bien le résultat demandé.

3. **a)** Soit $n > 0$. L'équation à résoudre est linéaire du premier ordre à coefficients constants. D'après le cours, ses solutions sont, par primitivation à vue, les fonctions

$$z_k : x \mapsto k\exp\left(\int^x \frac{n}{t}\mathrm{d}t\right) = k\exp\left(\ln\left(|x|^n\right)\right) \overset{x\geq 0}{=} kx^n \quad k \text{ étant un réel arbitraire.}$$

b) Soit $x \in I$. En posant $u = X$ et $v = \exp$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$, on constate que $\varphi = uv'$ et par la formule d'intégration par parties et calcul direct :

$$\int_0^x\varphi(u)\mathrm{d}u = [ue^u]_0^x - \int_0^x e^u\mathrm{d}u = xe^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1.$$

c) Soit $n > 0$. Puisque (D_n) est une équation linéaire, le théorème de structure nous dit que les solutions de (D_n) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière y_p de (D_n) n'importe quelle fonction z_k obtenue en **3a)**.

Or, d'après la question **2c)**, g_n est une solution particulière de (D_n). En combinant les résultats de **2a)** et **3b)**, on trouve que $g_n(x) = x^n\left(1 + (x-1)e^x\right)$. Finalement, les solutions de (D_n) sont les fonctions :

$$y : x \mapsto x^n(k + 1 + (x-1)e^x) \quad k \in \mathbf{R}. \qquad (\star)$$

Remarque. On pouvait aussi chercher y_p par variation de la constante, ce qui est ici une perte de temps. Rappelons toutefois la méthode. On pose *a priori* : $y_p = kz_1$, où cette fois k est une **fonction** à déterminer et z_1 la fonction z_k définie en **3a)** dans laquelle $k = 1$. Un calcul direct donne avec les abus de notations d'usage, en notant $a(x) = -\frac{n}{x}$:

$$y_p' + ay_p = \left| \begin{array}{l} k'z_1 + k(\underbrace{z_1' + az_1}_{=0 \text{ par } \mathbf{3.a)}}) \\ x^{n+1}e^x \end{array} \right.$$

De là on tire que pour que y_p soit solution de (D_n) il suffit de choisir une fonction k telle que $k'z_1 = x^{n+1}e^x$. Puis, en divisant par z_1 qui ne s'annule par sur I, et avec le résultat de **3.a)**, on trouve que $k(x) = (x-1)e^x$ convient. D'où une solution particulière.

d) La condition $y(1) = 0$ donne dans l'expression $(\star)$ de **3.c)** : $k = -1$, et on a bien le résultat demandé.

Partie 2

1. **a)** Soit $n > 0$. La fonction f_n est dérivable puisqu'elle est solution de (D_n). D'après (D_n) toujours, on a par factorisations successives :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in I \quad f_n'(x) & = & x^n\varphi(x) + \frac{n}{x}f_n(x) \\ & = & x^n \cdot xe^x + \frac{n}{x}x^n(x-1)e^x \\ & = & e^x(x^{n+1} + nx^{n-1}(x-1)) \\ & = & x^{n-1}e^x\left(x^2 + nx - n\right) \end{array}$$

b) Le discriminant du trinôme P_n est $\Delta = n^2 + 4n \geq 4 > 0$ (car $n \geq 1$), donc il admet bien deux racines réelles distinctes qui sont $\alpha_n = -\frac{n + \sqrt{n^2+4n}}{2} \leq 0$ et $\beta_n = \frac{\sqrt{n^2+4n} - n}{2}$.
Montrons que $\beta_n \geq 0$: par croissance de la racine carrée, comme $n^2 + 4n \geq n^2$ on a en passant aux racines $\sqrt{n^2+4n} \geq |n|$. Comme $|n| = n$, on a bien $\beta_n \geq 0$. D'autre part, $\beta_n - 1 = \frac{\sqrt{n^2+4n} - |n+2|}{2}$.
Ainsi : $\beta_n - 1 = \frac{\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{(n+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+4n+4}}{2} \leq 0$, et ce, encore par croissance de la racine carrée. On a bien les inégalités demandées.

Remarque. Les relations coefficients-racines permettent d'alléger la démonstration :

i) Ces dernières donnent immédiatement que α_n et β_n sont de signe opposé.

ii) Comme $x \mapsto P_n(x+1)$ a pour racines $s = \alpha_n - 1 \leq 0$ et $t = \beta_n - 1$, et que $P_n(x+1) = x^2 + (n+2)x + 1$, les relations coefficients-racines donnent $st = 1 \geq 0$, donc que $\beta_n - 1$ a le sgine de s.

c) Comme $x \in I$, le signe de $f_n'(x)$ est celui de $P_n(x)$ qui est un trinôme, ce qui donne le tableau de variations suivant.

x	0		β_n		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$			
$f_n(x)$	$\parallel 0$	$\searrow$	$f_n(\beta_n) < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites aux extrémités de I s'obtiennent par simples opérations sur les limites. En outre, par stricte positivité de P_n sur $[1, +\infty[$, la croissance de f_n est stricte sur $[1, +\infty[$.

d) D'après le tableau de variations, $f_n(x) < 1$ pour $x \leq 1$, donc f_n ne prend pas la valeur 1 sur $[0, 1]$. Sur $]1, +\infty[$, qui est un intervalle, f_n est continue et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, f_n est bijective de $]1, +\infty[$ sur $J = f(]1, +\infty[)$, et J est aussi un intervalle. D'après cette dernière propriété et les limites aux bornes de $]1, +\infty[$, $J = \mathbf{R}_+^\star$. Comme $1 \in J$, (E_n) a bien une unique solution dans $]1, +\infty[$. Comme $I =]0, 1] \cup]1 + \infty[$, (E_n) a une unique solution dans I.

2. **a)** Soit $n > 0$ et $x \in I$. Il est visible que $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$. Appliquant cette relation à $x = x_n \in I$, il vient : $f_{n+1}(x_n) = x_n f_n(x_n)$. Comme $f_n(x_n) = 1$ par définition de x_n, on obtient avec **2.** l'inégalité demandée.

b) Soit $n > 0$. L'inégalité $f_{n+1}(x_n) \geq 1$ peut se réécrire $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$. Encore par croissance de f_n^{-1}, on obtient que $x_n \geq x_{n+1}$, donc la suite (x_n) est bien décroissante.

c) Par les questions **1.d)** et **2.b)**, la suite (x_n) est minorée et décroissante, donc convergente par le théorème de convergence monotone.

3. **a)** On a vu en **1.d)** que 1 est un minorant de (x_n). Comme ℓ est le plus grand minorant de la suite d'après le théorème de convergence monotone : $\ell \geq 1$.

b) Puisque la relation donnée est vraie à tout rang, on peut y faire $n \to \infty$. Comme $\ell > 1$, par composition et inverse de limites, on a $1/x_n^n = \exp(-n \ln x_n) \to 0$. Cela impose que $(x_n - 1)e^{x_n}$ converge aussi vers 0 par égalité. Comme $e^{x_n} \to e^\ell \neq 0$, on en tire que $(x_n - 1) \to 0$, ce qui contredit $\ell > 1$. Par suite $\ell \leq 1$. Comme $\ell \geq 1$, d'après **3.a)**, $\ell = 1$.

4. **a)** Notons que pour tout entier n, $\varepsilon_n > 0$ puisque $x_n > 1$. En passant aux logarithmes dans la relation $f_n(x_n) = 1$, on a la relation demandée.

b) Soit $n > 0$. On a d'après la relation précédente : $n \ln(1 + \varepsilon_n) = -\ln \varepsilon_n - (1 + \varepsilon_n)$. Comme $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites, et avec $-\ln \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on obtient :

$$n \ln(1 + \varepsilon_n) = -\ln \varepsilon_n - 1 + o(1) = -\ln \varepsilon_n(1 + o(1)).$$

Par définition d'équivalent, cela signifie que $n \ln(1 + \varepsilon_n) \underset{n\infty}{\sim} -\ln \varepsilon_n$.

D'autre part, puisque $\varepsilon_n = o(1)$, on a par équivalents usuels : $\ln(1 + \varepsilon_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \varepsilon_n$. Avec ce qui précède, on a bien $n\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\ln \varepsilon_n$, ce qui donne, puisque $\varepsilon_n = o(1)$, que $\lim\limits_{n\to\infty} n\varepsilon_n = \infty$.

c) Partons de

$$\frac{\ln n}{\ln \varepsilon_n} = \underbrace{\frac{\ln(n\varepsilon_n)}{n\varepsilon_n}}_{a_n} \times \underbrace{\frac{n\varepsilon_n}{\ln \varepsilon_n}}_{b_n} - 1.$$

D'après la question précédente, b_n tend vers -1. Comme $n\varepsilon_n \to +\infty$, a_n dans vers 0 d'après la limite de référence $\dfrac{\ln u}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par définition d'équivalent, on obtient donc par opérations sur les limites que : $-\ln \varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.

d) En combinant le dernier résultat de **4.c)** à celui de **4.b)** et revenant à la définition de ε_n, on obtient :

$$x_n - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$