Devoir Surveillé 2 - BCPST 2

durée : 2 heures

Documents et calculatrices non autorisés.

Aucune réponse non justifiée ne sera prise en compte dans la notation. Il sera tenu compte de la clarté de la rédaction.
L'énonce comporte deux exercices indépendants.

Exercice 1 : Séries et probablités

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels non nuls. Dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire, on effectue une suite de tirages de la façon suivante : on tire une première boule :

– si la boule obtenue est noire, on s'arrête définitivement

– si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec en plus c_1 autres boules blanches puis on procède au tirage suivant

Pour tout entier naturel non nul n, si les $n-1$ premiers tirages ont donné une boule blanche, on procède au n-ième tirage :

∗ si la boule obtenue est noire, on s'arrête définitivement

∗ si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec en plus c_n autres boules blanches

On poursuit ainsi jusqu'à obtenir une boule noire, si on finit par en obtenir une, ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule noire.
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements :

B_n : « le n-ième tirage a lieu et on a obtenu une boule blanche »

E_n : « on s'arrête d'effectuer des tirages à l'issue du n-ième tirage »

F_n : « on obtient une boule blanche à chacun des n premiers tirages »

et on pose $p_n = \mathrm{P}(E_n)$ et $q_n = \mathrm{P}(F_n)$. Enfin, on définit l'événement G : « on s'arrête d'effectuer des tirages ».

1. *Question préliminaire.*
   Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$.
   Justifier que les séries $\sum \frac{1}{u_n}$ et $\sum \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ sont de même nature.

2. *Expression de* $\mathrm{P}(G)$.
   (a) Exprimer l'événement G à l'aide des événements E_n.
   (b) Justifier que la série $\sum p_n$ est convergente et que sa somme est égale à $\mathrm{P}(G)$.
   (c) Étudier la monotonie de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire qu'elle converge vers une limite ℓ appartenant à $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.
   (d) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $\overline{F}_n$ à l'aide des événements E_k pour $k\in\mathbb{N}^*$.
   (e) En déduire que $\mathrm{P}(G) = 1-\ell$.

3. *Étude du cas général.*
   On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*, \quad u_n = 1+\sum_{k=1}^{n} c_k.$$
   On constate que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du tirage n s'il a lieu.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer F_n à l'aide des événements B_k pour $k\in\mathbb{N}^*$ et en déduire une expression de q_n sous la forme d'un produit.
   (b) Montrer alors que :
   $$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, \quad \ln(q_n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{u_k}\right).$$
   (c) En déduire que G est quasi-certain si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{1}{u_n}$ est divergente.

4. *Applications à plusieurs cas particuliers.*
   Pour chacun des exemples suivants, dire si G est un événement quasi-certain ou non.
   (a) La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ c_n = 1$.
   (b) La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ c_n = 2n+1$.
   (c) La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ c_n = 2^{n-1}$.

Exercice 2 : Probabilités et diagonalisation

On considère deux urnes numérotées 1 et 2 et deux boules numérotées 1 et 2, réparties entre les deux urnes. On suppose qu'à l'instant 0, chaque urne comporte une boule, puis à chaque étape :

- on choisit aléatoirement un numéro entre 1 et 2,
- on change d'urne la boule portant ce numéro.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements :

* A_n : « l'urne 1 est vide »,
* B_n : « chaque urne comporte une boule »,
* C_n : « l'urne 2 est vide ».

Enfin, pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(A_n) \\ \mathrm{P}(B_n) \\ \mathrm{P}(C_n) \end{pmatrix}$. On a donc $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\mathrm{P}(A_{n+1})$, $\mathrm{P}(B_{n+1})$ et $\mathrm{P}(C_{n+1})$ en fonction de $\mathrm{P}(A_n)$, $\mathrm{P}(B_n)$ et $\mathrm{P}(C_n)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ où M est une matrice à déterminer.

2. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de M. Justifier que M est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $P^{-1}MP = D$.
   On choisira une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant et une matrice inversible P dont la première ligne est constituée de 1.

3. (a) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
   (b) Déterminer P^{-1}.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité que l'urne A soit vide à l'étape n.