

Programme de colles
Semaine 9 du 25/11 au 29/11/2024

Diagonalisation des matrices

- Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre d'une matrice carrée
- Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont ses éléments diagonaux.
- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre
- Une famille obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre
- Une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n
- Matrice diagonalisable
- Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n
- Une matrice carrée d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1
- Application au calcul des puissances d'une matrice
- Application à l'étude de suites imbriquées, de suites récurrentes linéaires
- Application à la résolution de systèmes différentiels linéaires
- Application à la résolution d'équations matricielles

Variables aléatoires réelles (VAR) discrètes

- Variable aléatoire réelle discrète sur (Ω, \mathcal{T})
- Loi de probabilité d'une VAR discrète
- Fonction de répartition : définition, croissance, limites en $\pm\infty$
- Retrouver la loi de probabilité à partir de la fonction de répartition
- Moments d'une VAR discrète
- Espérance d'une VAR : définition, linéarité, croissance
- Théorème de transfert
- Variance d'une VAR discrète, $\mathbf{V}(aX + b)$, $\mathbf{V}(X) \geq 0$
- Formule de König-Huygens
- Écart-type, variable centrée, variable centrée réduite, X^* variable centrée réduite associée à X
- Loi certaine, espérance, variance
- Loi uniforme, espérance de $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- Loi de Bernoulli, espérance, variance
- Loi binomiale, espérance, variance
- Loi de Poisson, espérance, variance
- Loi géométrique, espérance, variance, propriété d'invariance temporelle

Questions de cours :

1. Définition d'une valeur propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$
2. Que peut-on dire d'une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ?
3. Que peut-on dire de la juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes ?
4. Définition d'une matrice diagonalisable
5. Condition sur les dimensions des sous-espaces propres pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable
6. Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice $n \times n$ quant au nombre de ses valeurs propres
7. Donner une condition d'inversibilité d'une matrice à l'aide de ses valeurs propres
8. Donner deux conditions suffisantes (non nécessaires) de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle

9. Système (quasi) complet d'événements associé à une VAR discrète
10. Formule des probabilités totales pour un système (quasi) complet d'événements lié à une VAR discrète
11. Définition de la loi de probabilité d'une VAR discrète
12. Définition du moment d'ordre r d'une VAR discrète
13. Définition de l'espérance d'une VAR discrète
14. Théorème de transfert
15. Définition de la variance et de l'écart-type d'une VAR discrète
16. Théorème de König-Huygens
17. Espérance, variance et écart-type de $Y = aX + b$
18. Définition de la variable centrée réduite associée à une VAR discrète
19. Loi certaine, espérance et variance
20. Loi uniforme, espérance de la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$
21. Loi de Bernoulli, espérance et variance
22. Loi binomiale, espérance et variance
23. Loi de Poisson, espérance et variance
24. Loi géométrique, espérance et variance