

I Définitions et notations

Dans tout ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ désigne un univers probabilisé.

1 Variable aléatoire réelle discrète

DÉFINITION

Une **variable aléatoire réelle (VAR)** est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.
L'ensemble de ses valeurs $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est appelé **univers-image**, ou **support** de X .

Exemple 1 :

On pioche une carte dans un jeu de 32 cartes. On gagne 4 points si on pioche un *As*, 1 point si on pioche une figure, et aucun point sinon. Alors le gain G est une VAR, d'univers-image $G(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

DÉFINITION

Une VAR est dite **discrète** si son univers-image est :

- ou bien *fini* de cardinal $n \in \mathbf{N}^* : X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- ou bien *infini dénombrable* : $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$.

Exemple 1 : la VAR de l'exemple 1 est discrète, son univers-image est fini de cardinal 3.

Exemple 2 : On jette une infinité de fois un dé bien équilibré. On note X le rang du lancer où pour la première fois on obtient un '6', et on pose $X = 0$ si on n'obtient jamais de '6'.

Alors X est une VAR discrète infinie dénombrable, avec $X(\Omega) = \mathbf{N}$.

2 Notation des événements liés à une VAR

Soit X une VAR. Soient $a < b$ des réels. On note les événements :

- * $[X = a] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\} = X^{-1}(\{a\})$
- * $[X > a] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) > a\} = X^{-1}(]a, +\infty[)$
- * $[X \geq a] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq a\} = X^{-1}([a, +\infty[)$
- * $[X < b] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < b\} = X^{-1}(]-\infty, b])$
- * $[X \leq b] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq b\} = X^{-1}(]-\infty, b])$
- * $[a \leq X \leq b] = \{\omega \in \Omega, a \leq X(\omega) \leq b\} = X^{-1}([a, b])$
- * *etc*

Exemples : Avec la VAR de l'exemple 1 : $[G > 0]$ est l'événement "piocher un *As* ou une figure".

Avec la VAR de l'exemple 2 : $[X = 2]$ est l'événement "obtenir autre chose que '6' au premier lancer et obtenir '6' au deuxième lancer".

3 Système complet d'événements lié à une VAR

PROPOSITION

Soit X une VAR discrète d'univers-image $X(\Omega) = \{x_k, k \in I\}$, avec $I \subset \mathbf{N}$ fini ou infini.
Alors $([X = x_k])_{k \in I}$ est un système complet d'événements.

4 Fonction d'une VAR

PROPOSITION

- Soit X une VAR définie sur Ω , soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$.
Alors $f \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est encore une VAR, notée : $f(X)$.
- Soient $X_1, \dots, X_n$ des VAR définies sur Ω , soit $f : \prod_{i=1}^n X_i(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$.
Alors $f(X_1, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ est encore une VAR.

Exemples :

Avec la VAR de l'exemple 1, on peut définir G^2 valant 16, 1 ou 0 selon qu'on pioche un *As*, une figure ou une autre carte.

Au cours de la même expérience, si on définit la VAR Y par $Y = 2$ si on pioche un *trèfle*, $Y = 1$ si on pioche un *pique* et $Y = 0$ sinon, alors $Z = G^2 - 2GY + 3Y$ est encore une VAR.

On pourra vérifier que $Z(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 6, 11, 16\}$.

II Loi d'une variable aléatoire réelle discrète

1 Définition

DÉFINITION

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une VAR discrète. La **loi de probabilité de X** est l'application :

$$\mathbf{P}_X : \begin{cases} X(\Omega) \rightarrow [0, 1] \\ x \mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{cases}$$

Déterminer la loi de la VAR discrète X consiste donc à :

1. Déterminer l'univers-image $X(\Omega)$ de X ;
2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer la probabilité : $\mathbf{P}(X = x)$.

Exemples :

- Avec la VAR de l'exemple 1, on a vu que $G(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

$\mathbf{P}(G = 4) = \mathbf{P}(\text{"piocher un As"}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ par équiprobabilité des tirages, et de même :

$$\mathbf{P}(G = 1) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(G = 0) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

On peut ici donner la loi de G sous forme d'un tableau :

x_k	0	1	4
$\mathbf{P}(G = x_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- Avec la VAR de l'exemple 2, on considère pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ l'événement $[X = k]$, qu'on peut décrire par : "obtenir autre chose que '6' aux $(k - 1)$ premiers lancers et obtenir '6' au k -ème lancer".

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note S_n l'événement "on obtient '6' au n -ème lancer.

On a donc : $[X = k] = \left(\bigcap_{n=1}^{k-1} \overline{S_n} \right) \cap S_k$ ce qui donne avec la formule des probabilités composées :

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(\overline{S_1}) \times \mathbf{P}(\overline{S_2}) \times \dots \times \mathbf{P}_{\overline{S_1} \cap \dots \cap \overline{S_{k-1}}}(S_k)$$

Par indépendance des lancers successifs, et puisque le dé est bien équilibré :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \quad \text{soit :} \quad \forall k \geq 1, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1}.$$

2 Propriétés

PROPRIÉTÉ

Soit X une VAR discrète d'univers-image $X(\Omega)$.

* si $X(\Omega)$ est fini, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(X = x_k) = 1$.

* si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, alors $X(\Omega) = \{x_k\}_{k \in \mathbf{N}}$.

Dans ce cas, la série $\sum \mathbf{P}(X = x_k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_k) = 1$.

Exemples précédents :

$$* \quad \mathbf{P}(G = 0) + \mathbf{P}(G = 1) + \mathbf{P}(G = 4) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$$

* La série de terme général $\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1}$ pour $k \geq 1$ converge et :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6} \right)^k \quad \text{après un glissement d'indices}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 1 \quad \text{en reconnaissant une série géométrique de raison } q = \frac{5}{6} \quad (|q| < 1)$$

Remarque : On a : $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - \mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - 1 = 0$

donc l'événement "on n'obtient jamais '6'" est quasi-impossible.

PROPRIÉTÉ

Soit X une VAR discrète, et soit A une partie de $\mathbf{R}$. Alors : $\mathbf{P}(X \in A) = \sum_{x \in A \cap X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)$

Exemples : Avec la VAR de l'exemple 1 : $\mathbf{P}(G \in [-2, 2]) = \mathbf{P}(G = 0) + \mathbf{P}(G = 1) = \frac{7}{8}$.

Avec celle de l'exemple 2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0 \leq X \leq n) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \quad \text{car } \mathbf{P}(X = 0) = 0 \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad (\text{somme géométrique de raison } q \neq 1) \end{aligned}$$

3 Existence d'une VAR

THÉORÈME ** Théorème d'existence d'une VAR **

• Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels et $p_1, \dots, p_n$ des réels positifs.

Alors il existe une VAR X telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$

si, et seulement si, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

• Soient $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels et $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels positifs.

Alors il existe une VAR X telle que $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$ et $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$

si, et seulement si, $\sum_{k \in \mathbf{N}} p_k$ est convergente, et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

Exemple : Soit $\lambda > 0$ un réel. On sait que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$.

On pose, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Alors $p_k \geq 0$, $\sum_{k \geq 0} p_k$ converge et a pour somme 1.

Il existe donc une VAR X donc la loi est : $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

4 Fonction de répartition

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un univers Ω .

On appelle **fonction de répartition** de X l'application $F_X : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$$

Exemple : On a vu que pour la VAR de l'exemple 2 : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(0 \leq X \leq n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Mais puisque $[X < 0]$ est impossible, on a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X \leq n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Enfin, X ne prend que des valeurs entières, donc pour tout réel x , $\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(X \leq \lfloor x \rfloor)$

La fonction de répartition de X a donc pour expression :
$$\begin{cases} F_X(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(x) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 (les deux formules correspondent lorsque $x \in [0, 1[$)

PROPRIÉTÉ

Toute fonction de répartition est croissante sur $\mathbf{R}$.

De plus, elle admet pour limite 0 en $-\infty$, et 1 en $+\infty$.

preuve :

PROPRIÉTÉ

Soit F_X la fonction de répartition d'une VAR discrète X . Alors :

* F_X est continue à droite en tout réel x_0 : $\forall x_0 \in \mathbf{R}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} F_X(x) = F_X(x_0)$

* $\forall x_0 \in \mathbf{R}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} F_X(x) = F_X(x_0) - \mathbf{P}(X = x_0) = \mathbf{P}(X < x_0)$

Remarque : en particulier, F_X est continue en tout $x_0 \notin X(\Omega)$.

DÉFINITION

Deux VAR discrètes X, Y définies sur le même univers Ω ont **la même loi** lorsque :

- * $X(\Omega) = Y(\Omega)$;
- * $\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(Y = x)$.

Remarque : X et Y ne sont pas forcément égales. Par exemple si on jette une pièce bien équilibrée, qu'on définit $X = 1$ si on obtient 'pile' et 0 sinon, et $Y = 1$ si on obtient 'face' et 0 sinon, alors $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(Y = 1)$ donc X et Y ont la même loi, mais on a clairement $X \neq Y$.

THÉORÈME ** Obtention d'une loi grâce à la fonction de répartition **

Deux VAR discrètes ayant la même fonction de répartition ont la même loi.

En particulier, si F_X est la fonction de répartition d'une VAR discrète X ne prenant que des valeurs entières ($X(\Omega) \subset \mathbf{Z}$), alors on a : $\forall k \in \mathbf{Z}, \mathbf{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k - 1)$.

De plus, on a : $\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(X > k - 1) - \mathbf{P}(X > k)$.

Exercice 1 : On lance n fois un dé bien équilibré ($n \in \mathbf{N}^*$), et on note X la VAR égale au maximum obtenu au cours des n lancers.

1. Déterminer l'univers-image de X .
2. Pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, montrer que : $\mathbf{P}(X \leq k) = \left(\frac{k}{6}\right)^n$.
3. En déduire la loi de X .

III Variables aléatoires discrètes usuelles

1 Loi certaine : lorsqu'il n'y a aucun hasard

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X définie sur un univers Ω suit la **loi certaine de valeur a** lorsque $X(\Omega)$ est un singleton : $\exists a \in \mathbf{R}, X(\Omega) = \{a\}$

En conséquence, $\mathbf{P}(X = a) = 1$ et pour tout $b \neq a$, $\mathbf{P}(X = b) = 0$.

2 Loi uniforme : loi d'équiprobabilité

DÉFINITION

Soit $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbf{R}$, de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$.

On dit qu'une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi uniforme sur A** lorsque :

- $X(\Omega) = A$
- $\forall x \in A, \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{n}$.

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(A)$

Remarque : Il s'agit de la loi d'**équiprobabilité** sur A . Elle traduit l'expression "**au hasard**".

Si $A = \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de X est alors donnée par :

x_k	1	2	...	n
$\mathbf{P}(X = x_k)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Exemple : le résultat d'un lancer de dé supposé équilibré suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, 6 \rrbracket)$.

3 Loi de Bernoulli : expérience à deux issues

DÉFINITION

Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque :

- $X(\Omega) = \{0, 1\}$
- $\begin{cases} \mathbf{P}(X = 1) = p \\ \mathbf{P}(X = 0) = 1 - p \end{cases}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Cette loi modélise le succès ($X = 1$) ou l'échec ($X = 0$) à une expérience aléatoire donnée.

p est la probabilité du succès. Exemple : $X = 1$ si on obtient "*pile*" en lançant une pièce, et $X = 0$ sinon. p sera ici la probabilité de faire "*pile*" ($p = 1/2$ si la pièce n'est pas truquée).

4 Loi binomiale : loi des tirages avec remise

DÉFINITION

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

X compte le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p : si $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$X = \sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

5 Loi géométrique : loi du premier succès

DÉFINITION

Soit $p \in]0, 1[$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi géométrique de paramètre p** lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$
- $\forall k \in \mathbf{N}^*, \mathbf{P}(X = k) = p \times (1-p)^{k-1}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

X est le rang d'apparition du premier succès lors d'une succession infinie d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, et de même paramètre p .

La VAR X de l'exemple 2 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$: $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

L'événement $[X = 0]$ étant quasi-impossible, on considère que le support de X est $\mathbf{N}^*$ plutôt que $\mathbf{N}$.

PROPRIÉTÉ

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors la fonction de répartition de X vérifie : $\forall n \in \mathbf{N}, F_X(n) = 1 - (1-p)^n$.

On a donc aussi : $\mathbf{P}(X > n) = (1-p)^n$.

PROPOSITION

La loi géométrique est une loi "sans mémoire" :

si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $\forall n, m \in \mathbf{N}, \mathbf{P}_{[X > m]}(X > m+n) = \mathbf{P}(X > n)$.

6 Loi de Poisson : loi des événements rares

DÉFINITION

Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Une variable aléatoire X sur Ω suit la **loi de Poisson de paramètre λ** lorsque :

- $X(\Omega) = \mathbf{N}$
- $\forall k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Les lois de Poisson sont utilisées pour modéliser le nombre d'occurrences par unité de temps d'un phénomène dont on connaît l'occurrence moyenne λ . Par exemple, si on sait qu'en moyenne il y a 8 accidents par an à un carrefour donné, alors la VAR comptant le nombre d'accidents pendant une année fixée sera modélisée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 8$.

IV Moments d'une variable aléatoire réelle discrète

1 Moments d'ordre r

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, et soit $r \in \mathbf{N}$.

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ est fini, on appelle **moment d'ordre r** de X le réel :

$$m_r(X) = \sum_{k=1}^n (x_k)^r \mathbf{P}(X = x_k).$$

- Si $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$ et si la série $\sum_{k \geq 0} (x_k)^r \mathbf{P}(X = x_k)$ est **absolument convergente**,

alors le moment d'ordre r de X est la somme de cette série : $m_r(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k)^r \mathbf{P}(X = x_k)$.

Exercice 2 : Soit X une VAR discrète de loi : $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $\forall k \geq 1, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$.

1. Vérifier que cette formule définit bien la loi d'une VAR.
2. Montrer que X n'admet aucun moment d'ordre $r \geq 1$.

PROPOSITION

Soit X une VAR discrète admettant un moment d'ordre $r \in \mathbf{N}$.
Soit $s \in \mathbf{N}$ tel que $s \leq r$. Alors X admet aussi un moment d'ordre s .

preuve :

2 Espérance

DÉFINITION

L'espérance d'une VAR discrète X est, s'il existe, son moment d'ordre 1 :

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{P}(X = x_k)$
- Si $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$ et si $\sum_{k \geq 0} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est absolument convergente, alors :

$$\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k)$$

Remarque :

L'espérance s'interprète comme la **moyenne** de X . C'est la valeur de X qu'on peut *espérer* obtenir.

Exercice 3 : Soit X une VAR discrète de loi : $X(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\forall k \geq 2, \mathbf{P}(X = k) = \frac{k-1}{k!}$.

1. Montrer que : $\forall k \geq 2, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$.
2. En déduire que la formule proposée définit bien la loi d'une VAR X .
3. Montre que X possède une espérance, et calculer cette espérance.

DÉFINITION

Une VAR admettant une espérance nulle est dite **centrée**.

PROPRIÉTÉ ** Linéarité de l'espérance **

Soient X, Y deux VAR discrètes définies sur le même univers Ω , admettant une espérance.
Alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)$$

preuve : Résultat admis.

PROPRIÉTÉ ** Croissance de l'espérance **

Soient X, Y deux VAR discrètes définies sur le même univers Ω , admettant une espérance.
On suppose que : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$. Alors : $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.
En particulier : si $X \geq 0$ (ie : $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0$), alors : $\mathbf{E}(X) \geq 0$.

preuve :

THÉORÈME ** Théorème de transfert **

Soit X une VAR discrète de support $X(\Omega)$, et soit $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$. On pose $Y = f(X)$.

- Si $X(\Omega)$ est fini, alors : $\mathbf{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbf{P}(X = x)$.
- Si $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbf{N}\}$, alors Y admet une espérance ssi $\sum_{k \geq 0} f(x_k) \mathbf{P}(X = x_k)$ converge absolument. Dans ce cas, $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(x_k) \mathbf{P}(X = x_k)$.

preuve : Résultat admis.

3 Variance, écart-type

DÉFINITION

Soit X une VAR discrète telle que :

- X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$;
- $X - \mathbf{E}(X)$ admet un moment d'ordre 2.

Alors on appelle **variance** de X et on note $\mathbf{V}(X)$ le réel : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = m_2(X - \mathbf{E}(X))$.

Remarque : La variance est un *indicateur de dispersion* de la variable aléatoire autour de son espérance.

PROPOSITION ** Formule de KÖNIG HUYGENS **

Soit X une VAR discrète. Alors X admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2.

On a dans ce cas : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$

preuve :

PROPOSITION

Si X admet une variance, alors : $\forall a, b \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$

preuve :

PROPOSITION

Soit X admettant une variance. Alors : $\mathbf{V}(X) \geq 0$

et $\mathbf{V}(X) = 0$ ssi X est presque sûrement constante.

preuve :

DÉFINITION

Soit X une VAR admettant une variance.

On appelle **écart-type** de X et on note $\sigma(X)$ le réel : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$

Si $\mathbf{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, alors on dit que X est **centrée réduite**.

PROPOSITION

Soit X une VAR admettant une variance non nulle. On pose $X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$.

Alors X^* est centrée réduite. X^* est la VAR **centrée réduite associée** à X .

preuve :

V Moments usuels à connaître

1 Loi certaine : Si X suit une loi certaine de valeur a , alors $\mathbf{E}(X) = a$ et $\mathbf{V}(X) = 0$.

2 Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, alors $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.

3 Loi de Bernoulli : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbf{E}(X) = p$ et $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.

4 Loi binomiale : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.

5 Loi géométrique : Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

6 Loi de Poisson : Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}(X) = \lambda$ et $\mathbf{V}(X) = \lambda$.

VI Simulations informatiques

1 Loi certaine de valeur a

```
def certaine(a) :  
    return a
```

2 Loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$

```
import random as rd  
def uniforme(a,b) :  
    return rd.randint(a,b)
```

3 Loi de Bernoulli

```
import random as rd
def bernoulli(p) :
    return int(rd.random() < p)
```

4 Loi binomiale

```
import random as rd
def binomiale(n,p) :
    S = 0
    for _ in range(n) :
        S += rd.random() < p
    return S

import random as rd
def binomiale(n,p) :
    return sum( [ rd.random() < p for _ in range(n) ] )
```

5 Loi géométrique

```
import random as rd
def geometrique(p) :
    rang = 1
    while rd.random() > p :
        rang += 1
    return rang
```

6 Loi de Poisson

```
import random as rd
import numpy as np
def poisson(mu) :
    n, p = 0, np.exp(-mu)
    F = p
    r = rd.random()
    while F < r :
        n += 1
        p *= mu / n
        F += p
    return n
```

7 Lois quelconques

Situation 1 : deux listes données représentent la loi de probabilité d'une VAR X :

$V = [x_0, \dots, x_n]$ est la liste des valeurs prises par X : $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n\}$

$P = [p_0, \dots, p_n]$ est la liste correspondante des probabilités : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbf{P}(X = x_k) = p_k$.

```
import random as rd
def simulationX(V,P) :
    S, k, r = P[0], 0, rd.random()
    while S < r :
        k += 1
        S += P[k]
    return V[k]
```

Situation 2 : si $X(\Omega) = \mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^*$, et si $\mathbf{P}(X = k)$ est donnée par une formule : $\mathbf{P}(X = k) = f(k)$:

```
import random as rd
def simulationX(f) :
    S, k, r = f(0), 0, rd.random()
    while S < r :
        k += 1
        S += f(k)
    return k
```