Corrigé du Devoir Surveillé 2 - BCPST 2

Exercice 1 : Séries et probablités

1. *Question préliminaire.*
La suite (u_n) est une suite de nombres réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$, donc :
$$\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \sim \frac{1}{u_n} \geqslant 0.$$
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs :
$$\boxed{\text{Les séries } \sum \tfrac{1}{u_n} \text{ et } \sum \ln\left(1+\tfrac{1}{u_n}\right) \text{ sont de même nature.}}$$

2. *Expression de* $\mathrm{P}(G)$.
   (a) Par définition de l'événement G et des événements E_n pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\boxed{G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.}$$
   (b) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles. La σ-additivité assure que $\sum \mathrm{P}(E_n)$ converge et que sa somme vaut $\mathrm{P}(G)$.
$$\boxed{\text{La série } \sum p_n \text{ est convergente et sa somme est égale à } \mathrm{P}(G).}$$
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Obtenir une boule blanche à chacun des $(n+1)$ premiers tirages implique d'obtenir une boule blanche à chacun des n premiers tirages. En d'autres termes, $F_{n+1} \subset F_n$, ce qui donne $q_{n+1} \leqslant q_n$ en passant aux probabilités.
$$\boxed{\text{La suite } (q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$$
Étant décroissante et minorée par 0, la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Soit ℓ sa limite.
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant q_n \leqslant q_1 = \frac{1}{2}.$$
Par passage à la limite, on en déduit que :
$$\boxed{\text{la suite } (q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente et sa limite } \ell \text{ appartient à } \left[0, \tfrac{1}{2}\right].}$$
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'événement $\overline{F}_n$ signifie qu'on a obtenu une boule noire au cours des n premiers tirages.
$$\boxed{\text{Donc : } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{F}_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.}$$
   (e) L'événement $\overline{F}_n$ s'écrit comme union d'événements deux à deux incompatibles, donc :
$$\mathrm{P}(\overline{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(E_k) \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 - q_n = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$
D'après la question 2.(b) et par définition de ℓ
$$\boxed{\mathrm{P}(G) = 1 - \ell.}$$

3. *Étude du cas général.*
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $F_n = B_1 \cap \cdots \cap B_n$. D'après la formule des probabilités composées :
$$\mathrm{P}(F_n) = \mathrm{P}(B_1) \times \mathrm{P}_{B_1}(B_2) \times \cdots \times \mathrm{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{u_1}{1+u_1} \times \cdots \times \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{1+u_k}.$$
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{1+u_k}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\ln(q_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{1+u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{u_k}{1+u_k}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1+u_k}{u_k}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{u_k}\right)$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(q_n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{u_k}\right).}$$

(c) On raisonne par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
G \text{ est quasi-certain} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{P}(G) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ell = 0 \quad \text{d'après 2.(e)} \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} q_n = 0 \quad (\text{par définition de } \ell) \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \ln(q_n) = -\infty \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{u_k}\right) = +\infty \\
&\Leftrightarrow \quad \sum \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \text{ divergente} \quad (\text{car c'est une série à termes positifs}) \\
&\Leftrightarrow \quad \sum \frac{1}{u_n} \text{ divergente} \quad \text{d'après 1.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } G \text{ est quasti-certain si, et seulement si, la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{u_n} \text{ est divergente.}}$$

4. *Applications à plusieurs cas particuliers.*

(a) Dans cette question, $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 1 = n+1, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1}.$$

On reconnait le terme général de la série harmonique divergente. D'après la question 3.(c) :

$$\boxed{G \text{ est un événement quasi-certain.}}$$

(b) Dans cette question, $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + n(n+1) + n = n^2 + 2n + 1$$

Donc $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n^2+2n+1} \sim \dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$.

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente et selon le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{u_n}$ est également convergente. D'après la question 3.(c) :

$$\boxed{G \text{ n'est pas un événement quasi-certain.}}$$

(c) Dans cette question, $u_0 = 1$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique convergente car $|\frac{1}{2}| < 1$. D'après la question 3.(c) :

$$\boxed{G \text{ n'est pas un événement quasi-certain.}}$$

Exercice 2 : Probabilités et diagonalisation

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) :

$$\mathrm{P}(A_n+1) = \mathrm{P}(A_n)\,\mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(B_n)\,\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathrm{P}(C_n)\,\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(B_n).$$

Da la même manière, on trouve :

$$\mathrm{P}(B_{n+1}) = \mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(C_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(B_n).$$

(b) On en déduit que :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(A_{n+1}) \\ \mathrm{P}(B_{n+1}) \\ \mathrm{P}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(B_n) \\ \mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}(C_n) \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{P}(B_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(A_n) \\ \mathrm{P}(B_n) \\ \mathrm{P}(C_n) \end{pmatrix} = MX_n$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n \text{ où } M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } M \quad &\Leftrightarrow \quad M - \lambda I \text{ non inversible} \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(M - \lambda I) < 3 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} < 3 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 - \lambda^2 & \lambda \\ \boxed{1} & -\lambda & 1 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{pmatrix} < 3 \quad L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2\lambda(1-\lambda^2)} \\ \boxed{1} & -\lambda & 1 \\ 0 & \boxed{1/2} & -\lambda \end{pmatrix} < 3 \quad L_1 \leftarrow L_1 + (2\lambda^2 - 1)L_3 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathrm{Sp}(M) = \{-1, 0, 1\}.}$$

La matrice M étant carrée de taille 3 et possédant 3 valeurs propres distinctes,

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$$

(b) On recherchons une base de chaque sous-espace propre. On sait déjà qu'ils sont tous de dimension 1.

$*$ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(M) \quad &\Leftrightarrow \quad (M + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x + \frac{1}{2}y & = & 0 & L_1 \\ x + \ y + z & = & 0 & L_2 \\ \frac{1}{2}y + z & = & 0 & L_3 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x + \frac{1}{2}y & = & 0 & \\ 0 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 - L_3 \\ \frac{1}{2}y + z & = & 0 & \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -2z \\ z = z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}(V_1)$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$*$ On remarque que $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $E_0(M) = \mathrm{Vect}(V_2)$ avec $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$*$ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M) \quad & \Leftrightarrow \quad (M - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -x + \frac{1}{2}y & = & 0 & L_1 \\ x - \ \ y + z & = & 0 & L_2 \\ \frac{1}{2}y - z & = & 0 & L_3 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -x + \frac{1}{2}y & = & 0 & \\ 0 & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 + L_3 \\ \frac{1}{2}y - z & = & 0 & \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = 2z \\ z = z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc $E_1(M) = \text{Vect}(V_3)$ avec $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On a bien } P^{-1}MP = D \text{ en posant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. (a) Montrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

Initialisation : cas $n = 0$

$PD^0P^{-1}X_0 = PIP^{-1}X_0 = X_0$, donc le résultat est vrai pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

$$X_{n+1} \underset{1.(b)}{=} MX_n \underset{HR}{=} PDP^{-1} \times PD^nP^{-1}X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0.$$

$$\boxed{\text{Donc : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ X_n = PD^nP^{-1}X_0.}$$

(b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x + y + z & = & a & L_1 \\ -2x \qquad + 2z & = & b & L_2 \\ x - y + z & = & c & L_3 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} x + y + z & = & a & \\ 2y + 4z & = & 2a + b & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ -2y & = & c - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a - y - z = \dfrac{1}{4}(a - b + c) \\ y = \dfrac{1}{2}(a - c) \\ z = \dfrac{1}{4}(2a + b - 2y) = \dfrac{1}{4}(a + b + c) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{donc : } P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on détermine la première coordonnée de la matrice colonne X_n à l'aide des question précédentes.

$$\begin{aligned}
X_n = PD^nP^{-1}X_0 & = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-1)^n \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 - (-1)^n \\ 2(1 + (-1)^n) \\ 1 - (-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(A_n) = \frac{1}{4}(1 + (-1)^n). \text{ On constate que pour tout } n \text{ pair, } \mathrm{P}(A_n) = 0.}$$