Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

I Polynômes à coefficients dans K

1 Définition

Définition

On appelle **polynôme** à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbf{K}$ toute expression de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

où $n \in \mathbf{N}$ et $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$. X est appelée l'indéterminée.
Les éléments $a_0, a_1, \cdots, a_n$ de $\mathbf{K}$ sont les **coefficients** du polynôme P.
L'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathbf{K}[X]$.

Exemples :
∗ La fonction polynômiale $f : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto 2x^3 - 5x + 1 \end{cases}$ correspond au polynôme $P = 1 - 5X + 2X^3$.
∗ La fonction $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ M \mapsto 2M^3 - 5M + I_n \end{cases}$ correspond au même polynôme.

Cas Particuliers :

- On appelle **polynôme constant** tout polynôme de la forme a_0 où $a_0 \in \mathbf{K}$.
- Le **polynôme nul** est celui dont tous les coefficients sont nuls. On le note 0.
- On appelle **monôme** tout polynôme de la forme a_nX^n où $n \in \mathbf{N}$ et $a_n \in \mathbf{K}$.

2 Égalité de polynômes

Deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{p} a_kX^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_kX^k$ sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes coefficients :

$\forall k \in \mathbf{N},\ \ a_k = b_k$, en convenant que : $\forall k > p,\ \ a_k = 0$ et $\forall k > q,\ \ b_k = 0$.

Méthode : Lorsque deux polynômes sont égaux, on **identifie** leurs coefficients.

Cas particulier : Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.

Exercice 1 : Déterminer $a, b, c \in \mathbf{R}$ tels que $(a-1)X^3 + (a+b)X^2 + (b-c)X = 6X^2 + 2X$.

3 Degré d'un polynôme

Définition

∗ Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ un polynôme non nul.
On appelle **degré de** P et on note $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$.
On convient que $\deg(0) = -\infty$.
∗ Soit $n \in \mathbf{N}$.
On note $\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Exemples :

- $\deg(X^2 + 5X^3 - X^9) = 9$.
- $\deg\left(\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\right) \leqslant n$ avec égalité si, et seulement si $a_n \neq 0$.
- Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Alors P est constant si, et seulement si $\deg(P) \leqslant 0$.
- $\mathbf{R}_2[X] = \left\{aX^2 + bX + c,\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\}$.
  C'est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $2, 1, 0$ ou $-\infty$.
  Lorsque $\deg(P) = 2$, on dit que P est un *trinôme*.

Définition

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré n (donc $a_n \neq 0$). Alors :

* $a_n X^n$ est appelé **monôme dominant** de P.
* a_n est appelé **coefficient dominant** de P.
* Lorsque le coefficient dominant est égal à 1, le polynôme P est dit **unitaire**.

Exemple : $8X^2 + 4X^7$ a pour monôme dominant $4X^7$ et pour coefficient dominant 4.

II Opérations sur les polynômes

1 Combinaisons linéaires sur $\mathbf{K}[X]$

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ dans $\mathbf{K}[X]$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

Définition

On définit la somme $P + Q$ et le produit $\lambda.P$ par :

* $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$, avec la convention que $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$.
* $\lambda.P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$.

Une **combinaison linéaire** de P et Q est un polynôme $\lambda P + \mu Q$, avec $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$.

Propriété

1. $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \quad \deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall P \in \mathbf{K}[X], \quad \deg(\lambda.P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$

Remarque : Si P et Q ont des degrés différents, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$.

Proposition

* $\big(\mathbf{K}[X], +, .\big)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.
* $\mathbf{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ de dimension $n + 1$.

preuves :

Propriété

Toute famille de polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$ de degrés 2 à 2 distincts est libre.

preuve :

Proposition

Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors la famille $\big(1, X, X^2, \ldots, X^n\big)$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
On l'appelle la **base canonique** de $\mathbf{K}_n[X]$.

2 Multiplication des polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ dans $\mathbf{K}[X]$.

Définition

On définit le produit PQ par : $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec $\forall k \in [\![0, p+q]\!], \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$
avec comme précédemment la convention que : $a_k = 0$ si $k > p$ et $b_k = 0$ si $k > q$.

Exemple : Soient $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = X + X^2$. On a :

k	0	1	2	3	4
a_k	1	3	-1	0	0
b_k	0	1	1	0	0
c_k	0	1	4	2	-1

$c_0 = a_0b_0 = 0$
$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 1$
$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 4$
$c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 2$
$c_4 = a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 = -1$

Ce qui donne finalement : $PQ = X + 4X^2 + 2X^3 - X^4$.

Propriété

- Le produit des polynômes est associatif, commutatif, et il admet un élément neutre, le polynôme constant égal à 1 :
  $\forall P, Q, R \in \mathbf{K}[X],\ P(QR) = (PQ)R = PQR, \quad PQ = QP \quad \text{et} \quad P \times 1 = 1 \times P = P.$
- La multiplication des polynômes est distributive par rapport à l'addition :
  $\forall P, Q, R \in \mathbf{K}[X],\ P(Q + R) = PQ + PR.$
- $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \quad \deg(PQ) = \deg P + \deg Q$
- Les seuls polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.
- $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \quad PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$

preuves :

3 Composition

Définition

La composée des polynômes $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_kX^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_kX^k \in \mathbf{K}[X]$

est définie par : $P \circ Q = P\big(Q(X)\big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=0}^{q} b_jX^j\right)^k$. C'est encore un polynôme de $\mathbf{K}[X]$.

Exemples : Soient $P = X^2 - 1$ et $Q = X + 1$.
Alors $P \circ Q = (X + 1)^2 - 1 = X^2 + 2X$ et $Q \circ P = (X^2 - 1) + 1 = X^2$.

Propriété

- La composée des polynômes **n'est pas** commutative.
- $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X]$, si P, Q sont non nuls, alors : $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

preuve :

III Dérivation dans $\mathbf{K}[X]$

1 Dérivée d'un polynôme

Définition

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_kX^k \in \mathbf{K}[X]$. On définit le **polynôme dérivé de** P , noté P', par :

$$P' = \sum_{k=1}^{p} ka_kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)a_{k+1}X^k$$

On définit le **polynôme dérivé n-ième de** P, noté $P^{(n)}$, par récurrence :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbf{N}, \quad P^{(k+1)} = \big(P^{(k)}\big)' \end{cases}$$

Exemple : si $P \in \mathbf{K}_0[X]$, alors $P' = 0$.
Remarque : cette définition correspond à la dérivée des fonctions polynomiales d'une variable réelle.

2 Propriétés de la dérivée

Propriété

- $\forall P \in \mathbf{K}[X], \quad \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 \text{ si } \deg P \geqslant 1 \\ -\infty \quad\quad \text{ si } \deg P \leqslant 0 \end{cases}$
- $\forall P \in \mathbf{K}[X], \quad \deg(P) \leqslant n \Rightarrow P^{(n+1)} = 0$

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbf{N}^\star$, et soit $P = X^n$. Déterminer $P^{(n)}$.

Propriété

- $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \ \forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
- $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \quad (PQ)' = P'Q + PQ'$.
- $\forall P \in \mathbf{K}[X], \ \forall n \in \mathbf{N}, \ (P^n)' = nP'P^{n-1}$.
- $\forall P, Q \in \mathbf{K}[X], \quad (P \circ Q)' = Q' \times \big(P' \circ Q\big)$.

preuves :

IV Racines d'un polynôme

1 Définition

Définition

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.
On dit que α est **une racine de** P (ou **un zéro de** P) lorsque $P(\alpha) = 0$.

Exemple : on trouve les racines dans $\mathbf{K}$ d'un polynôme P de degré 2 en calculant son discriminant.
Si $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$, on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

<u>Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$</u> : $*$ Si $\Delta \geqslant 0$, on pose : $\alpha = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

α et β sont les racines de P ($\alpha = \beta$ quand $\Delta = 0$) et $P = a(X - \alpha)(X - \beta)$

$*$ Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine réelle (et ne peut se factoriser).

<u>Cas où $\mathbf{K} = \mathbf{C}$</u> : Soit $\delta \in \mathbf{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On pose : $\alpha = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b + \delta}{2a}$

Alors α et β sont les racines de P ($\alpha = \beta$ quand $\Delta = 0$) et $P = a(X - \alpha)(X - \beta)$

Lorsque les coefficients a, b, c sont réels :

$$\Delta \geqslant 0 \implies \big(\delta = \sqrt{\Delta} \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbf{R}\big) \quad \text{et} \quad \Delta < 0 \implies \big(\delta = i\sqrt{\Delta} \text{ et } \beta = \overline{\alpha}\big).$$

2 Divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$

Définition

Soient $A, B \in \mathbf{K}[X]$. On dit que B **divise** A s'il existe un polynôme Q tel que $A = BQ$.
On note alors $B\,|A$, et on dit que B est **un diviseur** de A ou que A est **un multiple** de B.

Exemples :

- $(X - 1) \,|\, (X^2 - 1)$ car $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$.
- Tous les polynômes divisent 0.
- Si $\deg P = 0$, alors P divise tout polynôme.
- $\forall P \in \mathbf{K}[X], \quad 0\,|P \Leftrightarrow P = 0$.
- Si $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $P\,|Q$ avec $Q \neq 0$, alors $\deg P \leqslant \deg Q$.

Exercice 3 : Montrer que $\forall n \geqslant 2, \quad X^2 \,|\, (X + 1)^n - nX - 1$.

3 Caractérisation des racines

Théorème

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$.
α est une racine de P si, et seulement si P est divisible par $X - \alpha$.

preuve :

COROLLAIRE

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, alors P est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$.

preuve :

THÉORÈME

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré $n \geqslant 0$. Alors P possède au maximum n racines.

preuve :

MÉTHODE : on utilise la formulation équivalente suivante pour démontrer qu'un polynôme est nul :
Si un polynôme de degré inférieur ou égal à n possède au moins $n+1$ racines, alors il est nul.

Exemple : la fonction cos n'est pas polynomiale.

Exercice 4 :
Soit P un polynôme dont la fonction polynomiale associée sur $\mathbf{R}$ est périodique de période $T > 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

4 Multiplicité d'une racine

DÉFINITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. Soit α une racine de P.
On appelle **multiplicité de la racine** α **dans** P le plus grand entier n tel que $(X-\alpha)^n | P$.

Remarques :

* On parle de racine *simple*, *double*, *triple*... quand la multiplicité vaut 1,2,3,...
* Si α n'est pas une racine de P, alors sa multiplicité vaut 0 par convention.
* Si $(X-\alpha)^k \,|\, P$ avec $k \geqslant 1$, alors la multiplicité de α est $\geqslant k$.
  On pourra donc parler de racines *au moins simples, au moins doubles ...*

Exemple : Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Si $\Delta = 0$, alors $-\dfrac{b}{2a}$ est une racine double de P.

Exercice 5 :
Déterminer les racines de $P = (X-1)(X^2-1)(X^3-1)(X^4-1) \in \mathbf{R}[X]$ et leurs multiplicités.

PROPOSITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

* α est une racine de P de multiplicité m.
* $\exists Q \in \mathbf{K}[X], \quad P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.
* $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

preuve :

Exercice 6 : Déterminer toutes les racines et leurs multiplicité de $P = X^4 - 6X^2 + 8X - 3$.

PROPOSITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Si P admet n racines distinctes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ de multiplicités respectives $m_1, m_2, \cdots, m_n$, alors P est divisible par $\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{m_k}$.

V Décomposition d'un polynôme

1 Polynôme scindé

DÉFINITION

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non nul. On dit que P est **scindé** lorsqu'il est constant, ou lorsqu'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1.

Exemples :

* $4(X-2)(X-3)^5$ est scindé.
* X^2+1 n'est pas scindé dans $\mathbf{R}[X]$. Il l'est dans $\mathbf{C}[X]$ car : $X^2+1 = (X-i)(X+i)$.

2 Factorisation dans $\mathbf{C}[X]$

THÉORÈME ** Théorème de d'Alembert-Gauss **

Dans $\mathbf{C}[X]$, tout polynôme non nul est scindé.

preuve : Théorème admis.

COROLLAIRE

Dans $\mathbf{C}[X]$, tout polynôme non constant admet au moins une racine.

Il s'écrit sous la forme : $\boxed{P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{m_k}}$ où $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont les racines de P de multiplicités $m_1, \cdots, m_n$ et λ est le coefficient dominant de P. On a : $\deg(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k$.

preuve :

Exercice 7 : Soit $P = X^n - 1$ avec $n \geqslant 1$. Factoriser P dans $\mathbf{C}[X]$.

3 Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$

PROPOSITION

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{C}$. Si α est une racine de P de multiplicité m, alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P de multiplicité m également.

preuve :

PROPOSITION ** Factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ *(hors-programme)* **

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Alors P se factorise dans $\mathbf{R}[X]$ sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{s} (a_\ell X^2 + b_\ell X + c_\ell)^{n_\ell}$$

où λ est le coefficient dominant de P, $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines réelles de P de multiplicités respectives $m_1, ..., m_r$, et où $(a_\ell X^2 + b_\ell X + c_\ell)$ sont des trinômes de discriminant $\Delta_\ell < 0$.

MÉTHODES : Pour factoriser un polynôme P :

* on factorise par X (ou par X^k) si X (ou X^k) est facteur commun
* on repère les identités remarquables quand il y en a
* si $P = aX^2 + bX + c$ et qu'on repère une racine évidente α, alors $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ permet de trouver l'autre racine β, et on factorise P en $P = a(X - \alpha)(X - \beta)$
* on utilise Δ si $\deg(P) = 2$ et si P n'a pas de racine évidente
* on factorise par $(X - \alpha)$ si on repère une racine évidente α
* si $\deg(P)$ est assez grand et qu'on repère une racine évidente α, on étudie sa multiplicité m en calculant $P'(\alpha)$, $P''(\alpha) \dots$ jusqu'à trouver un résultat non nul. On factorise alors par $(X - \alpha)^m$
* si P ne comporte que des puissances paires de X (ou multiples de 3, de 4 ...), alors on pose $T = X^2$ (ou $T = X^3, X^4 \dots$) et on factorise le polynôme Q tel que : $P = Q \circ T$

Quand P est à <u>coefficients réels</u> :

* si z est une racine complexe de P, alors on factorise par $(X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2$
* si z est une racine complexe de P de multiplicité m, alors on factorise par :
$$(X - z)^m (X - \overline{z})^m = \left(X^2 - 2\operatorname{Re}(z)X + |z|^2\right)^m$$
* si on sait factoriser P dans $\mathbf{C}[X]$, on regroupe les facteurs conjugués pour obtenir la factorisation dans $\mathbf{R}[X]$

Exercice 8 : Factoriser $P = X^9 - X^7 + X^5 - X^3$ dans $\mathbf{R}[X]$.