

TP 5 : Diagonalisation - Simulations d'expériences et de variables aléatoires

I Diagonalisation

```
1 | import numpy as np
2 | import numpy.linalg as la
```

À l'aide de python, dites si chacune des matrices A de l'exercice 3 de la feuille de TD6 est diagonalisable. Le cas échéant : donnez une matrice P telle $P^{-1}AP$ est diagonale. Vérifiez cela à l'aide de python en calculant le produit matriciel $P^{-1}AP$.

II Probabilités

```
1 | import random as rd
```

■ **Exercice 1. Objectif :** Écrire une fonction Python simulant un lancer de pile ou face, puis l'utiliser pour estimer la probabilité d'obtenir face.

1. Écrire une fonction `pile_ou_face()` qui simule un lancer de pile ou face, en renvoyant en sortie équiprobablement 0 ou 1. On pourra utiliser la commande `randint`.
2. Simuler 1000 lancers et calculer la fréquence d'apparition de face.
3. Augmenter le nombre de lancers jusqu'à 10 000 et observer la convergence de la fréquence vers la probabilité théorique.

■ **Exercice 2. Objectif :** Estimer la probabilité d'un événement en répétant une simulation (repose sur la loi faible des grands nombres).

1. Écrire une fonction `tirage()` pour simuler un tirage aléatoire de boules rouges et bleues dans un sac (5 rouges, 3 bleues). La fonction renverra 1 pour une boule rouge et 0 pour une boule bleue. On pourra utiliser la fonction `choice` et construire une liste `U` représentant le sac.
2. Estimer la probabilité de tirer une boule rouge en simulant 1000 tirages.
3. Comparer la fréquence observée avec la probabilité théorique.

■ **Exercice 3. Objectif :** Simuler une variable de Bernoulli pour observer la probabilité d'un succès.

1. Écrire une fonction simulant une variable de Bernoulli avec succès de probabilité $p = 0,3$. La fonction renverra 1 avec probabilité p (et 0 avec la probabilité $1 - p$).
2. Répéter l'expérience 1000 fois et calculer la fréquence des succès.
3. Observer la fréquence des succès pour différentes valeurs de p .

■ **Exercice 4. Objectif :** Étudier un schéma de Bernoulli avec plusieurs répétitions d'une expérience.

1. Simuler 10 répétitions d'une expérience de Bernoulli avec succès de probabilité $p = 0,2$ et déterminer le nombre de succès.
2. Répéter ce processus 1000 fois pour estimer la probabilité d'obtenir exactement 3 succès.
3. Comparer cette probabilité avec le résultat théorique.

■ **Exercice 5. Objectif :** Étudier des tirages indépendants sur un dé équilibré.

1. Simuler 1000 lancers de dé et calculer la fréquence d'apparition de chaque face.
2. Comparer les fréquences obtenues avec les probabilités théoriques.
3. Estimer la probabilité d'obtenir deux 6 consécutifs dans une série de 1000 lancers.



TP 5 : Diagonalisation - Simulations d'expériences et de variables aléatoires

2

■ **Exercice 6. Objectif :** Étudier la distribution de la somme obtenue lors du lancer de deux dés.

1. Simuler 1000 lancers de deux dés et calculer la somme des deux résultats.
2. Calculer les fréquences des sommes obtenues, et comparer avec la distribution théorique.

■ **Exercice 7. Objectif :** Simuler une variable géométrique pour observer le temps d'attente jusqu'à un succès.

1. Écrire une fonction qui simule la répétition d'une épreuve de Bernoulli jusqu'au premier succès avec $p = 0.3$.
2. Simuler 1000 répétitions et calculer la moyenne du nombre de tentatives nécessaires.
3. Comparer la moyenne obtenue à l'espérance théorique $E(X) = \frac{1}{p}$.

■ **Exercice 8. Objectif :** Étudier le temps d'apparition du r -ième succès dans une séquence de répétitions d'épreuves de Bernoulli.

1. Écrire une fonction qui simule le nombre de tentatives pour obtenir le 5ème succès avec $p = 0.3$.
2. Simuler 1000 répétitions et calculer la moyenne du nombre de tentatives nécessaires.
3. Comparer la moyenne observée à l'espérance théorique.

■ **Exercice 9. Objectif :** Étudier le temps d'apparition d'une séquence donnée dans une répétition de lancers de pile ou face.

1. Écrire une fonction simulant des lancers de pile ou face jusqu'à obtenir la séquence pile-pile-face. Par exemple, La fonction devra renvoyer 6 si la série de lancer observée est FPFPPF.
2. Simuler 1000 répétitions et calculer la moyenne du nombre de lancers nécessaires pour obtenir cette séquence.
3. Comparer la moyenne observée à des valeurs théoriques connues.

■ **Exercice 10. Objectif :** Observer la longueur de la première série unicolore dans une séquence de tirages.

1. Écrire une fonction simulant les tirages successifs avec remise d'une boule noire ou blanche dans une urne (contenant une boule noire et une boule blanche), et renvoyant en sortie. la longueur de la première série de boules de même couleur.
2. Répéter la simulation et calculer informatiquement la longueur moyenne de cette première série unicolore.

■ **Exercice 11. Objectif :** Étudier le temps d'attente pour obtenir deux succès consécutifs lors de répétitions mutuellement indépendantes d'épreuves de Bernoulli.

1. Écrire une fonction simulant des répétitions d'une expérience de Bernoulli avec $p = 0.5$.
2. Observer le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir deux succès consécutifs.
3. Simuler 1000 répétitions pour calculer la moyenne de cette attente.

■ **Exercice 12. Objectif :** Simuler une marche aléatoire sur une droite.

1. Écrire une fonction qui simule une marche aléatoire d'un point sur une droite, avançant d'une unité à droite ou à gauche avec des probabilités égales.
2. Tracer l'évolution de la position du point au cours de 100 étapes.
3. Étudier les propriétés de cette marche en répétant l'expérience plusieurs fois.