Exercice 1 : Une relation de divisibilité

1. Propriétés de j : on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

   D'après la formule de Moivre : $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = e^0$ donc $\boxed{j^3 = 1. \quad (1)}$

   j est donc racine de $X^3 - 1$, qu'on factorise en $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ en utilisant la racine évidente 1. Puisque $j \neq 1$, on en déduit que : $\boxed{j^2 + j + 1 = 0. \quad (2)}$

   Rq : résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ amène deux solutions complexes conjuguées : j et $\overline{j}$.

   $-j$ est racine de Q

   On calcule : $Q(-j) = (-j)^2 - (-j) + 1 = j^2 + j + 1 = 0$ d'après ce qui précède.

2. Q divise P

   $Q \in \mathbf{R}[X]$ et possède la racine complexe $-j$, donc également son conjugué $-\overline{j}$.
   Étant de degré 2 et unitaire, on peut dire que : $Q = (X+j)(X+\overline{j})$.

   On calcule maintenant
   $$\begin{aligned} P(-j) &= (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} \\ &= (j^2)^{n+2} + (-1)^{2n+1} j^{2n+1} \quad \text{d'après (2)} \\ &= j^{2n+4} - j^{2n+1} = j^{2n+1}(j^3 - 1) \\ &= 0 \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

   $-j$ est donc racine de P, et P est aussi à coefficients réels, donc $-\overline{j}$ est racine de P.
   P se factorise donc par $(X+j)(X+\overline{j})$: $\boxed{P \text{ se factorise par } Q.}$

Exercice 2 : Étude de degré

Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose : $P_n = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$.
On remarque que : $P_n \in \mathbf{R}_{2n}[X]$, c'est-à-dire : $\deg(P_n) \leqslant 2n$.

$*$ $P_0 = 1 - 2 + 1 = 0$ donc $\boxed{\deg(P_0) = -\infty.}$

$*$ $P_1 = X^2 + 1 - 2X^2 + X^2 - 1 = 0$ donc $\boxed{\deg(P_1) = -\infty.}$

$*$ $P_2 = (X^2+1)^2 - 2X^4 + (X^2-1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^4 + X^4 - 2X^2 + 1 = 2$ donc $\boxed{\deg(P_2) = 0.}$

$*$ soit $n \geqslant 3$, on développe en utilisant la formule de Newton :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{2k} - 2X^{2n} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

On isole les termes d'indices $k \geqslant n-2$:

$$\begin{aligned} P_n = {} & X^{2n} + nX^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2} X^{2n-4} + \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} X^{2k} - 2X^{2n} \\ & + X^{2n} - nX^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2} X^{2n-4} + \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k} \end{aligned}$$

$$P_n = n(n-1)X^{2n-4} + \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} X^{2k} + \sum_{k=0}^{n-3} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

On peut alors conclure : $\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \deg(P_n) = 2n - 4.}$

Rq : formule encore valable pour $n = 2$, et preuve identique en considérant les sommes vides (nulles) $\sum_{k=0}^{-1}$.

Exercice 3 : Décompositions dans $\mathbf{C}[X]$

1. $P = 2X^3 - 14X + 12$
   - 2 est facteur commun : $P = 2(X^3 - 7X + 6)$
   - 1 est racine évidente : $P = 2(X-1)(aX^2 + bX + c)$ avec $a, b, c \in \mathbf{R}$
   - examen du coefficient dominant : $a = 1$, examen du terme constant : $c = -6$

   donc $P = 2(X-1)(X^2 + bX - 6)$
   option 1 : examen du terme de degré 1 : $-bX - 6X = -7X$ donc $b = 1$
   option 2 : évaluation en -1 (par exemple) : $12 = -2(-b-5)$ donc $b = 1$

On trouve dans les deux cas : $P = 2(X-1)(X^2+X-6)$.

• Utilisation du discriminant pour terminer : $\Delta = 25 > 0 \dots$

ou : on repère une autre racine évidente (2).

$\boxed{\text{Conclusion : } P = 2(X-1)(X-2)(X+3)}$

2. $Q = -X^7 + 6X^6 - 10X^5 + 11X^3 - 6X^2$

   • X^2 est facteur commun : $Q = -X^2(X^5 - 6X^4 + 10X^3 - 11X + 6) = -X^2U$

   • 1 est racine évidente de U.

   $U' = 5X^4 - 24X^3 + 30X^2 - 11$ donc $U'(1) = 0$: 1 est racine multiple de U (au moins double)

   • -1 est racine évidente de U. De plus, $U'(-1) \neq 0$ donc -1 est racine simple de U.

   On factorise U par $(X-1)^2(X+1) = X^3 - X^2 - X + 1$: $\quad U = (X^3 - X^2 - X + 1)(aX^2 + bX + c)$

   • examen du coefficient dominant : $a = 1$, examen du terme constant : $d = 6$,

   examen du monôme de degré 1 : $-6X + bX = -11X \quad$ donc $b = -5$.

   On a donc : $U = (X-1)^2(X+1)(X^2 - 5X + 6)$

   • Utilisation du discriminant pour terminer : $\Delta = 1 > 0 \dots$

   ou : on repère une autre racine évidente (2).

   $\boxed{\text{Conclusion : } Q = -X^2(X-1)^2(X+1)(X-2)(X-3)}$

3. $R = iX^5 + \sqrt{3} + i$

   D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, R possède 5 racines complexes (distinctes ou non).

   On les cherche en résolvant l'équation $R(z) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

   $R(z) = 0 \Leftrightarrow iz^5 + \sqrt{3} + i = 0 \Leftrightarrow z^5 = -\dfrac{\sqrt{3}+i}{i} = -1 + i\sqrt{3}$

   On utilise les formes exponentielles : $z \neq 0$ donc $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbf{R}_+^\star$ et $\theta \in \mathbf{R}$,

   et $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2j \qquad$ (voir exercice 1)

   $z^5 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 2 \\ 5\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2} \\ \theta = \frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5} \ (k \in \mathbf{Z}) \end{cases}$

   Les 5 racines complexes de R s'obtiennent en choisissant 5 valeurs consécutives de k, par exemple $k \in [\![0, 4]\!]$. On note $z_k = \sqrt[5]{2}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}\right)}$ pour $k \in [\![0, 4]\!]$. On a alors : $\boxed{R = i\prod_{k=0}^{4}(X - z_k).}$

4. $S = X^4 + X^2 + 1$

   • On pose $V = X^2$: $S = V^2 + V + 1 = W \circ V \quad$ où $W = X^2 + X + 1$.

   • on factorise W, avec Δ, ou voir l'exerice 1 : $W = (X - j)(X - \overline{j})$, $\quad$ avec $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

   • on trouve une racine carrée complexe de j : $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$ vérifie $\quad \omega^2 = j$.

   • $S = (V - j)(V - \overline{j}) = (X^2 - j)(X^2 - \overline{j})$

   • troisième identité remarquable : $\boxed{S = (X - \omega)(X + \omega)(X - \overline{\omega})(X + \overline{\omega}).}$

   Rq : on obtient la décomposition dans $\mathbf{R}[X]$ de S en regroupant les facteurs conjugués :

   $(X - \omega)(X - \overline{\omega}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\omega)X + |\omega|^2 = X^2 - X + 1$

   $(X + \omega)(X + \overline{\omega}) = X^2 + 2\,\mathrm{Re}(\omega)X + |\omega|^2 = X^2 + X + 1$

   donc $\boxed{S = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).}$

5. $T = X^4 + X^3 + X + 1$

   • -1 est racine évidente de T, et $T' = 4X^3 + 3X^2 + 1$ donc $T'(-1) = 0$.

   -1 est racine multiple de T : on factorise T par $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$

   • $T = (X^2 + 2X + 1)(aX^2 + bX + c)$

   Examen du coefficient dominant : $a = 1$. Examen du terme constant : $c = 1$

   Soit : $T = (X^2 + 2X + 1)(X^2 + bX + 1)$

   • Examen du terme de degré 1, ou évaluation en 1 : $b = -1$

   et $T = (X+1)^2(X^2 - X + 1)$

   • Utilisation de Δ (ou voir exercice 1) : $X^2 - X + 1 = (X + j)(X + \overline{j})$.

   $\boxed{\text{Conclusion : } T = (X+1)^2(X + j)(X + \overline{j}).}$

Exercice 4 : Une suite de polynômes

1. <u>Décomposition de $P_0 = X^3 - \frac{5}{2}X^2 + \frac{3}{2}$</u>

   P_0 admet la racine évidente 1, donc se factorise par $X - 1$.
   On obtient : $P_0 = (X-1)(X^2 - \frac{3}{2}X - \frac{3}{2})$

   $\Delta = \frac{33}{4} > 0$ et on trouve : $\boxed{P_0 = \big(X-1\big)\big(X - \frac{3-\sqrt{33}}{4}\big)\big(X - \frac{3+\sqrt{33}}{4}\big)}$

2. <u>Étude de P_1</u>

   a) D'après la relation de récurrence :
   $$\begin{aligned} P_1 &= (X-1)[2XP_0 + 3(X^4-1)] \\ &= (X-1)[2X(X^3 - \tfrac{5}{2}X^2 + \tfrac{3}{2}) + 3(X^4-1)] \\ &= (X-1)[2X^4 - 5X^3 + 3X + 3X^4 - 3] \\ &= 5X^5 - 10X^4 + 5X^3 + 3X^2 - 6X + 3 \end{aligned}$$

   b) $P_1(1) = 0$ donc 1 est racine de P_1.
   $P_1' = 25X^4 - 40X^3 + 15X^2 + 6X - 6$ donc $P_1'(1) = 0$ et 1 est racine multiple de P_1.
   $P_1'' = 100X^3 - 120X^2 + 30X + 6$ donc $P_1''(1) \neq 0$. $\boxed{\text{1 est racine double de } P_1.}$

   c) $P_1 = (X-1)[2X(X-1)(X^2 - \frac{3}{2}X - \frac{3}{2}) + 3(X^4-1)]$ d'après le début de la factorisation de P_0
   $$\begin{aligned} &= (X-1)[X(X-1)(2X^2 - 3X - 3) + 3(X^2-1)(X^2+1)] \\ &= (X-1)[X(X-1)(2X^2 - 3X - 3) + 3(X-1)(X+1)(X^2+1)] \\ &= (X-1)^2[X(2X^2 - 3X - 3) + 3(X+1)(X^2+1)] \\ &= (X-1)^2[5X^3 + 3] \end{aligned}$$
   On résout dans $\mathbf{C}$ l'équation $5z^3 + 3 = 0$, soit $z^3 = -\frac{3}{5}$.
   Sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ donc $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$ et $-\frac{3}{5} = \frac{3}{5}e^{i\pi}$ donc l'équation équivaut à :
   $$\begin{cases} r^3 = \frac{3}{5} \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \alpha \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbf{Z}) \end{cases}$$
   On choisit $k \in [\![-1, 1]\!]$ pour représenter les 3 solutions : $\theta = -\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}$ ou π.
   $\boxed{\text{Conclusion : } P_1 = 5\big(X-1\big)^2\big(X+\alpha\big)\big(X - \alpha e^{-\frac{i\pi}{3}}\big)\big(X - \alpha e^{\frac{i\pi}{3}}\big)}$

3. <u>1 est racine multiple de P_n pour tout $n \geqslant 1$</u>

   Preuve par récurrence :
   $*$ on a vu que 1 est racine double de P_1, donc la propriété est vraie au rang $n = 1$
   $*$ soit $n \geqslant 1$ et supposons que 1 soit racine multiple de P_n.
   Alors il existe un polynôme Q_n tel que : $P_n = (X-1)^2 Q_n$.
   Par ailleurs, 1 est racine de $X^{2n+4} - 1$ donc il existe un polynôme R_n tel que : $X^{2n+4} - 1 = (X-1)R_n$.
   On calcule alors :
   $$\begin{aligned} P_{n+1} &= (X-1)[2XP_n + 3(X^{2n+4} - 1)] \\ &= (X-1)[2X(X-1)^2 Q_n + 3(X-1)R_n] \\ &= (X-1)^2[2X(X-1)Q_n + 3R_n] = (X-1)^2 S_n \quad \text{avec } S_n \in \mathbf{R}[X] \end{aligned}$$
   donc 1 est racine multiple de P_{n+1}.
   $*$ La propriété est initialisée au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout rang $n \geqslant 1$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ 1 \text{ est racine de } P_n \text{ de multiplicité au moins 2.}}$

4. <u>Étude du degré de P_n</u>

   a) Majoration du degré de P_n, par récurrence :
   $*$ $\deg(P_0) = 3 \leqslant 2 \times 0 + 3$
   $*$ soit $n \geqslant 0$ et supposons $\deg(P_n) \leqslant 2n + 3$.
   Alors $\deg(2XP_n) \leqslant 2n + 4$ donc $\deg\big(2XP_n + 3(X^{2n+4} - 1)\big) \leqslant 2n + 4$.
   On multiplie par $(X - 1)$: $\deg(P_{n+1}) \leqslant 2n + 5 = 2(n+1) + 3$.
   $*$ d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ \deg(P_n) \leqslant 2n + 3.}$

   b) Soit c_n le coefficient de degré $2n + 3$ de P_n.
   On identifie les coefficients de degré $2n + 5$ dans la relation de récurrence qui définit P_{n+1} :
   $$\boxed{c_{n+1} = 2c_n + 3}$$

c) La suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmético-géométrique : $\begin{cases} c_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ c_{n+1} = 2c_n + 3 \end{cases}$

Recherche d'un point fixe : $\ell = 2\ell + 3$ donne $\ell = -3$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = c_n - \ell = c_n + 3$ est géométrique de raison 2 :

$\forall n \geqslant 0,\ u_n = u_0 2^n = (c_0 + 3)2^n = 2^{n+2}$.

Enfin, $c_n = u_n - 3$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N},\ c_n = 2^{n+2} - 3.}$

d) On constate que : $\forall n \geqslant 0, c_n \neq 0$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 0,\ \deg(P_n) = 2n + 3.}$

5. On obtient la valeur de $P_n(0)$ en observant le terme constant de P_n (son coefficient de degré 0) :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ P_n(0) = 3.}$$