

**Programme de colles**  
**Semaine 11 du 9/12 au 13/12/2024**

**Variables aléatoires réelles (VAR) discrètes**

- Variable aléatoire réelle discrète sur  $(\Omega, \mathcal{T})$
- Loi de probabilité d'une VAR discrète
- Fonction de répartition : définition, croissance, limites en  $\pm\infty$
- Retrouver la loi de probabilité à partir de la fonction de répartition
- Moments d'une VAR discrète
- Espérance d'une VAR : définition, linéarité, croissance
- Théorème de transfert
- Variance d'une VAR discrète,  $\mathbf{V}(aX + b)$ ,  $\mathbf{V}(X) \geq 0$
- Formule de König-Huygens
- Écart-type, variable centrée, variable centrée réduite,  $X^*$  variable centrée réduite associée à  $X$
- Loi certaine, espérance, variance
- Loi uniforme, espérance de  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- Loi de Bernoulli, espérance, variance
- Loi binomiale, espérance, variance
- Loi de Poisson, espérance, variance
- Loi géométrique, espérance, variance, propriété d'invariance temporelle

**Polynômes**

- Monômes, degré, coefficients, polynômes à coefficients réels ou complexes
- Opérations sur les polynômes (somme, produit)
- Degré d'une somme, d'un produit
- Une combinaison linéaire de monômes de degrés distincts ne peut être nulle que si tous les coefficients sont nuls
- Polynôme dérivé, degré du polynôme dérivé
- Racines d'un polynôme
- Un polynôme  $P$  est factorisable par  $X - \alpha$  si, et seulement si,  $\alpha$  est une racine de  $P$
- Généralisation à plusieurs racines distinctes
- Ordre de multiplicité d'une racine
- Théorème de d'Alembert-Gauss :
  - \* Tout polynôme à coefficients complexes de degré  $n$  peut s'écrire  $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ ,
  - où  $\alpha_i$  sont les racines complexes de  $P$ , pas nécessairement distinctes, et  $\lambda$  son coefficient dominant.
  - \* Tout polynôme de degré  $n$  admet exactement  $n$  racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité
- Un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  ayant au moins  $n + 1$  racines, comptées avec leur ordre de multiplicité, est nul

**Questions de cours :**

1. Système (quasi) complet d'événements associé à une VAR discrète
2. Formule des probabilités totales pour un système (quasi) complet d'événements lié à une VAR discrète
3. Définition de la loi de probabilité d'une VAR discrète
4. Définition du moment d'ordre  $r$  d'une VAR discrète
5. Définition de l'espérance d'une VAR discrète
6. Théorème de transfert

7. Définition de la variance et de l'écart-type d'une VAR discrète
8. Théorème de König-Huygens
9. Espérance, variance et écart-type de  $Y = aX + b$
10. Définition de la variable centrée réduite associée à une VAR discrète
11. Loi certaine, espérance et variance
12. Loi uniforme, espérance de la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$
13. Loi de Bernoulli, espérance et variance
14. Loi binomiale, espérance et variance
15. Loi de Poisson, espérance et variance
16. Loi géométrique, espérance et variance
17. Qu'appelle-t-on racine d'un polynôme ?
18. Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme ?
19. Somme et produit des racines d'un trinôme
20. Si  $\alpha \in \mathbf{C}$  est racine de  $P \in \mathbf{R}[X]$ , que dire de  $\bar{\alpha}$  ?