I Généralisation de la notion d'intégrale sur un segment

1 Intégrale sur un intervalle I

Soit I un intervalle réel, et soit f une fonction **continue** ou **continue par morceaux** sur I.
Si I est un segment ($I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbf{R},\ a \leqslant b$), on sait déjà définir l'intégrale de f entre a et b.
Rappel : si f est continue sur $[a, b]$, alors elle admet une primitive F sur $[a, b]$ et on pose :

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Dans ce chapitre, on généralise cette définition à des intervalles I qui ne sont pas des segments :

$$I = [a, b[,\ ]a, b],\ ]a, b[,\ [a, +\infty[,\ ]a, +\infty[,\ ]-\infty, b],\ ]-\infty, b[,\ ]-\infty, +\infty[.$$

Définition

> Soit f une fonction continue sur un intervalle réel I.
> Si I n'est pas un segment, alors $\displaystyle\int_I f$ est une intégrale **généralisée** (ou **impropre**).

On peut régler un cas simple :
Définition

> Soit I un intervalle de bornes $a, b \in \mathbf{R}$, et soit f une fonction continue sur I.
> Si I n'est pas un segment, et si f est prolongeable par continuité aux bornes de I en une fonction $\tilde{f}$, alors on pose : $\displaystyle\int_I f = \int_a^b \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t$.
> On dira alors que l'intégrale de f sur I est **faussement généralisée**.

Exemple : Étude de $\displaystyle\int_{]0,1]} t.\ln(t)\,\mathrm{d}t$

2 Définition

a Intégrale sur $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$

Définition

> Soient $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On pose $I = [a, b[$.
> Soit f une fonction continue sur I, et soit F une primitive de f sur I.
> On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$ **converge**, ou **existe** si et seulement si F possède une limite finie en b. On définit alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} F(x) - F(a)$.
> Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_I f$ **diverge**.

Exercice 1 : Étudier l'existence (la convergence) et calculer le cas échéant les intégrales :

$*\ I_1 = \displaystyle\int_{[0,1[} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ $\qquad *\ I_2 = \displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $\qquad *\ I_3 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}^+} e^{-t}\,\mathrm{d}t$

b Intégrale sur $]a, b]$ ou $]-\infty, b]$

Définition

> Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R}$. On pose $I =]a, b]$.
> Soit f une fonction continue sur I, et soit F une primitive de f sur I.
> On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$ **converge**, ou **existe** si et seulement si F possède une limite finie en a. On définit alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - \lim_{x\to a} F(x)$.
> Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_I f$ **diverge**.

Exercice 2 : Étudier l'existence (la convergence) et calculer le cas échéant les intégrales :

$*\ I_4 = \displaystyle\int_{]0,1]} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $\qquad *\ I_5 = \displaystyle\int_{]0,1]} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ $\qquad *\ I_6 = \displaystyle\int_{]-\infty,-1]} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$

c Intégrale sur $]a, b[$ ou $]-\infty, b[$ ou $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, +\infty[$

DÉFINITION

Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. On pose $I =]a, b[$.
Soit f une fonction continue sur I, et soit F une primitive de f sur I.
On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I f$ **converge**, ou **existe** si et seulement si il existe $c \in I$ tel que $\displaystyle\int_{]a,c]} f$ et $\displaystyle\int_{[c,b[} f$ convergent. On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_I f$ **diverge**.

Exercice 3 : Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales :

$*$ $I_7 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}_+^\star} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ $\qquad$ $*$ $I_8 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}_+^\star} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ $\qquad$ $*$ $I_9 = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

Méthode : si $\displaystyle\int_a^b f$ est impropre en a et en b, on choisit c tel que $a < c < b$ et on étudie séparément la convergence de $\displaystyle\int_a^c f$ et celle de $\displaystyle\int_c^b f$.

d Intégrale d'une fonction continue sur un segment sauf en un nombre fini de points

DÉFINITION

Soit $I = [a, b]$ un segment et f continue sur I sauf en $c_1, \ldots, c_n \in I$.
On suppose $a \leqslant c_1 \leqslant \ldots \leqslant c_n \leqslant b$, et on pose $c_0 = a$ et $c_{n+1} = b$.
Alors $\displaystyle\int_I f$ **converge** si et seulement si toutes les intégrales $\displaystyle\int_{c_k}^{c_{k+1}} f$ convergent, pour $k \in [\![0, n]\!]$.
On pose alors : $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f$. Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_I f$ **diverge**.

Exercice 4 : Étudier l'existence et calculer le cas échéant les intégrales :

$*$ $I_{10} = \displaystyle\int_{[-1,1]} \ln(|t|)\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ $*$ $I_{11} = \displaystyle\int_{[0,2]} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{|t-1|}}$ $\qquad$ $*$ $I_{12} = \displaystyle\int_{[-2\pi,2\pi]} \tan(t)\,\mathrm{d}t$

II Propriétés des intégrales impropres

1 Linéarité

PROPOSITION

Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, et f, g continues sur l'intervalle I de bornes a et b.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Si $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent, alors $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g)$ converge,
et dans ce cas : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.

preuve :

2 Relation de Chasles

PROPOSITION

Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, et f continue sur l'intervalle I de bornes a et b.
Soit c tel que : $a < c < b$. Alors $\displaystyle\int_I f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent.
On a dans ce cas : $\displaystyle\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.

3 Positivité, croissance

Proposition

Soient $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, et f, g continues sur l'intervalle I de bornes a et b.

$*$ si $\displaystyle\int_I f$ converge et si $f \geqslant 0$ sur I, alors : $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.

$*$ si $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent et si $f \leqslant g$ sur I, alors : $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

$*$ si $\displaystyle\int_I f$ converge, si $f \geqslant 0$ sur I et si $\exists c \in I$, $f(c) > 0$, alors : $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

Remarque : ce dernier résultat est appelé *stricte positivité* des intégrales généralisées.

Il s'énonce de façon équivalente : si $\displaystyle\int_I f$ converge et est nulle, si $f \geqslant 0$ sur I, alors f est nulle sur I.

preuves :

III Théorèmes de convergence

1 Théorème de comparaison

Théorème **∗∗ Théorème de comparaison pour les fonctions positives ∗∗**

Soit I un intervalle de bornes a, b avec $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur I. Alors :

$*$ si $\displaystyle\int_I g$ converge, alors $\displaystyle\int_I f$ converge et on a : $\displaystyle 0 \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

$*$ si $\displaystyle\int_I f$ diverge, alors $\displaystyle\int_I g$ diverge aussi.

Exercice 5 : Étudier l'existence des intégrales :

$*$ $\displaystyle I_{13} = \int_{[1,+\infty[} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$ $*$ $\displaystyle I_{14} = \int_{]0,1]} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ $*$ $\displaystyle I_{15} = \int_{\mathbf{R}_+} (e^t - 2)e^{-2t}\,\mathrm{d}t$

2 Théorème d'équivalence

Théorème **∗∗ Théorème d'équivalence pour les fonctions positives ∗∗**

Soit I un intervalle de bornes a, b avec $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur I, et soit c tel que $a < c < b$.

$*$ <u>Cas où $b \notin I$</u> : si $f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$, alors $\displaystyle\int_c^b f$ et $\displaystyle\int_c^b g$ sont de même nature.

$*$ <u>Cas où $a \notin I$</u> : si $f(t) \underset{t \to a}{\sim} g(t)$, alors $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_a^c g$ sont de même nature.

Exercice 6 : Étudier l'existence des intégrales :

$*$ $\displaystyle I_{16} = \int_{\mathbf{R}_+} \frac{2t-1}{t^3+t+1}\,\mathrm{d}t$ $*$ $\displaystyle I_{17} = \int_{\mathbf{R}_-} \frac{(t+1)e^t}{2t-1}\,\mathrm{d}t$ $*$ $\displaystyle I_{18} = \int_{]0,1[} \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$

3 Intégrales généralisées absolument convergentes

Définition

Soit I un intervalle de bornes a, b, et f continue sur I.
On dit que $\displaystyle\int_I f$ est **absolument convergente** si $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Proposition

Si $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

Attention : la réciproque de cette proposition est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Exercice 7 : Étudier l'existence des intégrales :

$*$ $\displaystyle I_{19} = \int_{[1,+\infty[} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ $*$ $\displaystyle I_{20} = \int_{]0,1]} \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ $*$ $\displaystyle I_{21} = \int_{\mathbf{R}} \frac{\cos^2(t)+\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

IV Techniques de calcul

1 Application de la définition

Si on connaît une primitive F de f sur I, on étudie ses limites aux bornes de I pour savoir si $\displaystyle\int_I f$ converge.

2 Intégration par parties

Théorème ** **Intégration par parties (IPP) pour une intégrale généralisée** **

Soient u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de bornes a et b. Soit $c \in]a, b[$.

* Cas où $b \notin I$: si uv possède une limite finie en b, et si $\displaystyle\int_c^b uv'$ converge, alors $\displaystyle\int_c^b u'v$ converge

$$\text{et : } \int_c^b u'v = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - u(c)v(c) - \int_c^b uv'$$

* Cas où $a \notin I$: si uv possède une limite finie en a, et si $\displaystyle\int_a^c uv'$ converge, alors $\displaystyle\int_a^c u'v$ converge

$$\text{et : } \int_a^c u'v = u(c)v(c) - \lim_{x\to a} u(x)v(x) - \int_a^c uv'$$

Exercice 8 : Étudier l'existence, et calculer le cas échéant les intégrales :

* $\displaystyle I_{22} = \int_{\mathbf{R}_+} te^{-t}\,\mathrm{d}t$
* $\displaystyle I_n = \int_{[1,+\infty[} \frac{\ln(t)}{t^n}\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbf{N})$

3 Changement de variables

Théorème ** **Changement de variable pour une intégrale généralisée** **

Soient φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J de bornes α et β, strictement monotone de J vers $I = \varphi(J)$. On sait que I est un intervalle de bornes a, b avec $a = \lim\limits_{\alpha} \varphi$ et $b = \lim\limits_{\beta} \varphi$.

Soit f continue sur I. Alors $\displaystyle\int_I f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_J \varphi' \times f \circ \varphi$ converge.

Dans ce cas, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \varphi'(x) f\big(\varphi(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9 : Calculer * $\displaystyle I_{23} = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ * $\displaystyle I_{24} = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

Propriété

Soit $b \in \mathbf{R}_+^\star \cup \{+\infty\}$, et soit $I =]-b, b[$. Soit f une fonction continue sur I.

Si f est paire ou impaire, alors $\displaystyle\int_0^b f$ et $\displaystyle\int_{-b}^0 f$ sont de même nature. En cas de convergence :

* si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-b}^b f = 2 \times \int_0^b f$.
* si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-b}^b f = 0$.

Exemples : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2 \times \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 10 : Calculer * $\displaystyle I_{25} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ * $\displaystyle I_{26} = \int_{-1}^1 \frac{t\sqrt{1-|t|}}{\cos(\frac{\pi t}{2})}\,\mathrm{d}t$

V Intégrales impropres célèbres

1 Intégrale de Gauss

Propriété

L'**intégrale de Gauss** $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

2 Intégrales de Riemann

Propriété *!!!* *Hors-programme* *!!!*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Une **intégrale de Riemann** est de la forme : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, et vaut alors $\dfrac{1}{\alpha - 1}$.
* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et vaut alors $\dfrac{1}{1-\alpha}$.
* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

Exercice 11 : Démontrer ces résultats.