Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

I Rappels sur les systèmes linéaires

1 Théorie des systèmes linéaires

Définition

Un système d'équations linéaires est la donnée de n équations $L_1, \ldots, L_n$ à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ réelles ou complexes, telles que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $L_i : a_{i,1}\,x_1 + \ldots + a_{i,p}\,x_p = b_i$.
Les scalaires $(a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}}$ sont les **coefficients principaux** du système.
Les scalaires $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ forment le **second membre** du système.
Lorsqu'ils sont tous nuls, on dit que le système est **homogène**.

Écriture matricielle :
On pose : $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice des coefficients principaux du système,
$X = (x_j)_{j\in[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ la matrice-colonne des inconnues,
$B = (b_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ la matrice-colonne du second membre.

Alors le système $(\mathcal{S})$ $\begin{cases} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{cases}$ équivaut à l'équation matricielle : $\boxed{AX = B}$ qu'on peut noter : $(A|B)$.

Définition

Le **rang** d'un système linéaire $\mathcal{S}$ est le rang de la matrice A des coefficients principaux de $\mathcal{S}$.

Théorème ** **Ensemble-solution d'un système linéaire** **

Soit $(\mathcal{S})$ un système de taille $n \times p$ et de rang r. On note $S \subset \mathbf{K}^p$ son ensemble-solution.
* Si $r < n$, alors $(\mathcal{S})$ possède $n - r$ **équations auxiliaires**.
Si l'une d'entre elles n'est pas vérifiée, alors $S = \varnothing$. Sinon $S \neq \varnothing$ (système **compatible**).
* Si $r = n$, alors $(\mathcal{S})$ est compatible, et S contient une unique, ou une infinité de solutions.
* Si $r < p$ et si $(\mathcal{S})$ est compatible, alors il possède une infinité de solutions, qui s'expriment en fonction de $p - r$ **variables libres** ($p - r$ est le degré de liberté du système).
* Si $r = p$ et si $(\mathcal{S})$ est compatible, alors il possède une unique solution.
* Si $r = p = n$, alors $(\mathcal{S})$ est compatible et possède une unique solution (système **de Cramer**).
* Si $(\mathcal{S})$ est homogène, alors il est compatible, et admet la solution (au moins) le p-uplet nul.

2 Pratique des systèmes linéaires

Définition

On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire :

- $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ avec $\boxed{\alpha \neq 0}$: multiplication de L_i par un scalaire α **non nul**,
- $L_i \longleftrightarrow L_k$: échange des lignes L_i et L_k,
- $L_i \longleftarrow L_i + \sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} \alpha_k L_k$: ajout à L_i d'une combinaison linéaire **des autres** lignes.

Proposition

On ne change pas l'ensemble-solution d'un système linéaire en procédant à un nombre quelconque d'opérations élémentaires.

Théorème ** **Théorème (algorithme) du pivot de Gauss** **

On peut résoudre tout système linéaire par opérations élémentaires sur les lignes.

Description de l'algorithme : on choisit sur une colonne de A un coefficient non nul $a_{i,j}$. On le pose comme **pivot** et on s'en sert pour annuler tous les autres coefficients de la même colonne, grâce à des opérations élémentaires du type : $L_k \longleftarrow L_k - \dfrac{a_{k,j}}{a_{i,j}} L_i$.
On poursuit en appliquant le même procédé à la sous-matrice $A^{(i,j)}$ obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j, jusqu'à obtenir une sous-matrice nulle, ou vide.
On résout alors $(\mathcal{S})$ **par remontée**, en utilisant les pivots dans l'ordre inverse de leur apparition.
Le nombre de pivots est égal au rang de la matrice A (et du système linéaire).

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbf{R}^4$ ou $\mathbf{R}^3$ les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases}2x+3y+5z+7t=4\\4x+y+2z+2t=0\\7x+2y+5z+3t=7\end{cases}\qquad(S_2)\begin{cases}2x+5y+4z+t=3\\x+4y+2z+2t=2\\x+y+2z-t=0\end{cases}\qquad(S_3)\begin{cases}5x+11y+2z=1\\2x+5y+z=2\\-3x+7y+3z=3\end{cases}$$

II Espaces vectoriels : définition et exemples

1 Définition et notations

DÉFINITION

Soient E un ensemble, $+ : E\times E\to E$ une *addition* dans E et $. : \mathbf{K}\times E\to E$ un *produit externe*.
Alors le triplet $(E,+,.)$ est un **K-espace vectoriel** si les propriétés suivantes sont vérifiées :

Propriétés de l'addition :

- L'addition dans E est **associative** : $\forall(x,y,z)\in E^3,\quad (x+y)+z=x+(y+z)$
- E contient un **élément-neutre** noté 0_E vérifiant : $\forall x\in E,\quad x+0_E=0_E+x=x$
- Tout élément x de E possède un **symétrique** : $\forall x\in E,\exists y\in E,\quad x+y=y+x=0_E$
- L'addition dans E est **commutative** : $\forall(x,y)\in E^2,\quad x+y=y+x$

Propriétés du produit externe :

- 1 est l'**élément-neutre** du produit externe : $\forall x\in E,\quad 1.x=x$
- Distributivité sur l'addition vectorielle : $\forall\lambda\in\mathbf{K},\forall(x,y)\in E^2,\quad \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$
- Distributivité sur l'addition scalaire : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\forall x\in E,\quad (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$
- Associativité : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2,\forall x\in E,\quad (\lambda\mu).x=\lambda.(\mu.x)$

On note alors : $(E,+,.)$ est un **K**-ev, ou encore : E est un **K**-ev (les lois + et . sont alors sous-entendues).
Les éléments de E sont appelés les **vecteurs** de E, les éléments de **K** sont les **scalaires**.
Si $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, on dit aussi que E est un *espace vectoriel réel* ; si $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, on parle d'*espace vectoriel complexe*.
L'élément-neutre 0_E est appelé le **vecteur-nul** de E, parfois noté $\overrightarrow{0}$.
Le symétrique d'un vecteur $x\in E$ est noté $-x$.

2 Exemples

a L'ensemble $\mathbf{K}^n$

Soit $n\in\mathbf{N}^\star$. Alors $\mathbf{K}^n$ est le produit cartésien de **K** par lui-même n fois.
C'est l'ensemble des n-uplets $(x_1,\cdots,x_n)$ où $x_i\in\mathbf{K}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.
Pour deux n-uplets $x=(x_1,\cdots,x_n)$ et $y=(y_1,\cdots,y_n)$ éléments de $\mathbf{K}^n$, et pour $\lambda\in\mathbf{K}$, on pose :

- $x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)\in\mathbf{K}^n$
- $\lambda.x=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)\in\mathbf{K}^n$

Alors $\boxed{(\mathbf{K}^n,+,.)\text{ est un }\mathbf{K}\text{-ev.}}$

Exemples : $\mathbf{R}^2$ est un **R**-ev, assimilable à un plan géométrique, $\mathbf{R}^3$ est un **R**-ev, assimilable à l'espace.
Le **couple** $(1,-2)$ est un vecteur de $\mathbf{R}^2$, le **triplet** $(2,1,5)$ est un vecteur de $\mathbf{R}^3$.

b Ensemble de polynômes

L'addition de deux polynômes et la multiplication d'un polynôme par une constante munissent $\mathbf{R}[X]$ ou $\mathbf{C}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel sur **R** ou **C**. Le vecteur nul de $\mathbf{K}[X]$ est le polynôme nul.
preuve :

c Ensemble des applications de R dans R

$E=\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})=\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ muni de l'addition de deux applications, et du produit d'une application par un réel est un espace vectoriel réel. Le vecteur nul de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ est la fonction nulle.
preuve :

d Ensemble de matrices

Soient $n,p\in\mathbf{N}^\star$. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans **K**, muni de l'addition matricielle et du produit d'un scalaire par une matrice, est un **K**-ev.
La matrice nulle $0_{n,p}$ est le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
preuve :

e Ensemble de VAR définies sur un univers Ω

L'ensemble des VAR définies sur le même univers Ω forme un $\mathbf{R}$-ev.

f Ensemble des suites réelles ou complexes

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles.
Pour deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E$ et pour un réel λ, on pose :

- $u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$
- $\lambda.u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

Alors $(\mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R}), +, .)$ est un $\mathbf{R}$-ev. Le vecteur nul de $\mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ est la suite nulle.
De façon similaire, l'ensemble $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ des suites complexes est un $\mathbf{C}$-ev.

3 Calculs dans un espace vectoriel

Soit E un $\mathbf{K}$-ev. Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, pour tous vecteurs $x, y \in E$:

- $x - y = x + (-y)$
- $\lambda.0_E = 0_E$
- $\lambda(-y) = -\lambda.y$
- $\lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y$
- $0.x = 0_E$
- $(-\mu).x = -\mu.x$
- $(\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x$
- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

4 Combinaisons linéaires

Définition

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ et soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E et $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ des scalaires.
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i$ est un vecteur appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $x_1, \cdots, x_n$.

Exercice 2 : Dans $\mathbf{R}^3$, on pose $u = (3, 8, 2)$, $v = (1, 1, -1)$ et $w = (0, 5, 5)$.
Montrer que w est combinaison linéaire de u et v.

III Sous-espaces vectoriels

1 Définition

Définition

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbf{K}$-ev et soit F une partie de E. Alors F est un **sous-espace vectoriel** de E si :

- F est **non vide** : $F \neq \varnothing$
- F est **stable par combinaison linéaire** : $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \quad \lambda.x + \mu.y \in F$

On note : F est un **s-ev** de E.
Remarque : si F est un s-ev de E, alors $0_E \in F$.

2 Exemples et contre-exemples

Exemples usuels :

∗ Dans un $\mathbf{K}$-ev E quelconque :

$\{0_E\}$ (s-ev nul de E), et E sont des s-ev de E,

$\{\lambda.x,\ \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}.x = \mathrm{Vect}(x)$ est la **droite vectorielle engendrée** par $x \in E, x \neq 0_E$.

∗ Dans $E = \mathbf{K}^n$, soient $a_1, \ldots, a_n$ des scalaires fixés :

$\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \right\}$ l'ensemble-solution d'une équation linéaire homogène.

L'ensemble solution d'un système linéaire homogène de taille $n \times p$ est un s-ev de $\mathbf{K}^p$.

Par exemple, les solutions (x, y, z) de l'équation $2x - y + 3z = 0$ forment un s-ev de $\mathbf{R}^3$.

∗ Dans $\mathbf{K}[X]$, soit $n \in \mathbf{N}$:

$\mathbf{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n.

∗ Dans $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, soient $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$ fixés :

$\{f \in E,\ f(a) = 0\}$ l'ensemble des applications qui s'annulent en a,
$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications infiniment dérivables,
$\mathcal{C}^n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications n fois dérivables, et de dérivée n-ème continue,
l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.

* Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ($n \in \mathbf{N}^\star$) :
  $\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonales,
  $\mathcal{T}_n^+(\mathbf{K}), \mathcal{T}_n^-(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures ou inférieures,
  $\mathcal{S}_n(\mathbf{K}),\ \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ les ensembles des matrices symétriques ou anti-symétriques.
* Dans $E = \mathcal{F}(\mathbf{N}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles ou complexes :
  l'ensemble des suites convergentes,
  l'ensemble des suites bornées,
  l'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre p.

preuves :

Contre-exemples : les sous-ensembles suivants **ne sont pas** des s-ev

- les solutions dans $\mathbf{K}^n$ d'une équation linéaire non homogène, ou d'une équation non linéaire.
  $\big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 2x - y = 1\big\}$ et $\big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ 2x - y^2 = 0\big\}$ ne sont pas des s-ev de $\mathbf{R}^2$.
- Dans $\mathbf{K}[X]$, l'ensemble des polynômes de degré **égal** à $n \in \mathbf{N}$.
- Dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, l'ensemble des suites croissantes, l'ensemble des suites divergentes.
- Dans $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, l'ensemble des fonctions positives, l'ensemble des fonctions bijectives.
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'ensemble des matrices inversibles, l'ensemble des matrices diagonalisables.

Propriété

> Soient F_1 et F_2 deux s-ev d'un même espace vectoriel E.
> Alors $F_1 \cap F_2$ est encore un s-ev de E.

Remarque : Cette propriété se généralise à toute intersection de sous-espaces vectoriels.
Attention : C'est faux en général pour la réunion !
preuve :

Exercice 3 : Dans $\mathbf{R}^3$, on définit les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$ et $\mathcal{Q} : x - y + 3z = 0$. Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Exercice 4 : Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un s-ev de E si et seulement si : $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

3 Sous-espace vectoriel engendré

Définition

> Soit E un $\mathbf{K}$-ev et soit $P \subset E$ une partie non vide de E.
> Alors l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de P est un sous-espace vectoriel de E, noté $\mathrm{Vect}(P)$, et appelé **sous-espace vectoriel engendré** par P.

Exemples :

* Soit $x \neq 0_E \in E$. Alors $\mathrm{Vect}(\{x\}) = \mathbf{K}.x$ est la droite vectorielle engendrée par x.
* Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $\mathrm{Vect}(\{1, X, \cdots, X^n\}) = \mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 5 : Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer une équation de $\mathrm{Vect}(u, v)$, avec $u = (0, 1, 2)$ et $v = (1, -1, 3)$.

Propriété

> Soit P une partie non vide d'un $\mathbf{K}$-ev E.
> Alors $\mathrm{Vect}(P)$ est le plus petit s-ev de E (au sens de l'inclusion) qui contient P.

preuve :

IV Familles particulières de vecteurs

1 Famille génératrice

Définition

> Soit E un $\mathbf{K}$-ev, et soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
> Alors on dit que la famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

On retient qu'une famille est génératrice si tout vecteur x de E est une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille :
$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n,\ \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . x_i \quad \text{avec } x_i \in \mathcal{F}$$

Remarque : Toute famille de laquelle on peut extraire une famille génératrice est encore génératrice.

Définition

> Soit $F \subset E$ un s-ev. Alors $\mathcal{F}$ est **génératrice de** F si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = F$.
> On dit aussi que $\mathcal{F}$ *engendre* F.

Exercice 6 : Montrer que la famille $\big(X+1, X^2+1, X^2+X\big)$ est génératrice de $\mathbf{R}_2[X]$.

2 Famille liée

Définition

> Soit E un $\mathbf{K}$-ev, et soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
> Alors on dit que la famille $\mathcal{F}$ est **liée** s'il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, **non tous nuls**, tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i = 0_E$

Exemple : La famille $((3,-2),(-6,4))$ est liée dans $\mathbf{R}^2$, car $2(3,-2)+(-6,4) = (0,0) = 0_{\mathbf{R}^2}$.
Remarques :

* Une famille qui contient le vecteur nul 0_E est toujours liée.
* Si, à une famille liée, on ajoute des vecteurs, alors on obtient encore une famille liée.
* La famille (x, y) est liée signifie que x et y sont **colinéaires**.
* Soit $\mathcal{F}$ une famille liée. Alors l'un (au moins) des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres : $$\exists x \in \mathcal{F}, \exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, \;\; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i \quad \text{avec } x_i \in \mathcal{F}, x_i \neq x$$

3 Famille libre

Définition

> Soit E un $\mathbf{K}$-ev, et soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
> Alors on dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** si elle n'est pas liée.
> Dans ce cas, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathcal{F}$, $\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], \;\; \lambda_i = 0.$

Remarque : Si la famille formée par les vecteurs $x_1, \cdots, x_n$ est libre, on dit que ces vecteurs sont **linéairement indépendants**.
Exercice 7 : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que la famille (A, B, C) est libre.

4 Base

Définition

> Soit E un $\mathbf{K}$-ev, et soit $\mathcal{B}$ une famille de vecteurs de E.
> Alors on dit que la famille $\mathcal{B}$ est une **base** de E si elle est **libre et génératrice**.
> Dans ce cas, tout vecteur de E s'écrit **de façon unique** comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$: $$\forall x \in E, \; \exists! x_1, \dots, x_n \in \mathcal{B}, \; \exists! \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \;\; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i$$
> Les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples : * Dans $\mathbf{K}^n$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i le n-uplet de $\mathbf{K}^n$ comportant 1 en $i^{\text{ème}}$ place et 0 partout ailleurs. Alors $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la **base canonique** de $\mathbf{K}^n$.
* La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$
où la matrice E_{ij} possède le coefficient 1 en position (i, j) et 0 partout ailleurs.

preuves :

Théorème ** Théorème d'existence de bases **

> Soit E un $\mathbf{K}$-ev non réduit à $\{0_E\}$. Alors E possède (au moins) une base $\mathcal{B}$.

preuve : théorème admis.

Définition

> Soit F un s-ev d'un espace vectoriel E. On dit qu'une famille d'éléments de F est une **base de** F si elle est libre et si elle engendre F.

Exemple : La base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ est : $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
Exercice 8 : Déterminer une base de $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \; 2x - y + z = 0\big\}$.

V Dimension

1 Définition

DÉFINITION

Soit E un $\mathbf{K}$-ev possédant une base $\mathcal{B}$ de cardinal fini $n \in \mathbf{N}^\star$.
Alors pour toute base $\mathcal{B}'$ de E, $\mathcal{B}'$ est finie et de cardinal n.
Le cardinal commun à toute base de E s'appelle la **dimension** de E, notée : $\dim E$.

Exemples et contre-exemples :

- La base canonique de $\mathbf{K}^n$ contient n vecteurs, donc $\mathbf{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n.
- La base canonique de $\mathbf{K}_n[X]$ contient $(n+1)$ vecteurs, donc : $\dim(\mathbf{K}_n[X]) = n+1$.
  A contrario, $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie (il ne possède aucune base finie).
- $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ n'est pas de dimension finie.

Remarque : Par convention, on dira que $E = \{0_E\}$ est de dimension 0.

PROPRIÉTÉ

Si E est un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbf{N}$, alors tout s-ev F de E est aussi de dimension finie, et on a : $\dim F \leqslant \dim E$.
Si $F \neq E$, alors on a : $\dim F < \dim E$. On parle alors de sous-espace vectoriel *strict*.

2 Lien avec les familles particulières

PROPRIÉTÉ

Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie n. et soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :

* Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est de cardinal $p \leqslant n$, et dans ce cas on peut compléter la famille $\mathcal{F}$ en une base de E.
* $\mathcal{F}$ est libre et de cardinal n si et seulement si c'est une base de E.
* Si $\mathcal{F}$ est génératrice, alors $\mathcal{F}$ est de cardinal $p \geqslant n$, et dans ce cas on peut en extraire une base de E.
* $\mathcal{F}$ est génératrice et de cardinal n si et seulement si c'est une base de E.

Exercice 9 : Soient $u = (1,3), v = (0,5)$ et $w = (-1,4) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que (u, v, w) est liée.

Exercice 10 : Dans $E = \mathbf{R}_3[X]$, on pose $P_1 = X^2 - 2, P_2 = 2X^3 + X + 1, P_3 = 3X - 1$ et $P_4 = 5$. Montrer que (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbf{R}_3[X]$.

3 Dimension de sous-espaces vectoriels

PROPRIÉTÉ

Soient F et G des s-ev d'un $\mathbf{K}$-ev E de dimension finie.
Alors F et G sont de dimensions finies. De plus :

- si $F \subset G$, alors $\dim F \leqslant \dim G$;
- si $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$.

preuve :

4 Rang d'une famille de vecteurs

DÉFINITION

Soient E un $\mathbf{K}$-ev et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E telle que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension finie. Alors on appelle **rang** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. On note : $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big)$.

PROPRIÉTÉ

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de cardinal p d'un espace vectoriel E de dimension n.
On note $r = \mathrm{rg}(\mathcal{F})$ le rang de la famille $\mathcal{F}$. Alors :

- $r \leqslant p$ et $r \leqslant n$
- $r = n$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est génératrice, et dans ce cas $p \geqslant n$.
- $r = p$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est libre, et dans ce cas $p \leqslant n$.
- $r = p = n$ si et seulement si la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

VI Aspect matriciel en dimension finie

1 Définitions

Soit E un $\mathbf{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base de E.

DÉFINITION

$*$ Soit v un vecteur de E. Il s'écrit alors (de façon unique) : $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$,
où les $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.
Alors on dit que la matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est la **matrice du vecteur** v **dans la base** $\mathcal{B}$,
et on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

$*$ Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.
Alors on appelle **matrice des vecteurs** $v_1, \cdots, v_p$ **dans la base** $\mathcal{B}$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p) = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{p,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{p,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{p,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $(v_{j,1}, \cdots, v_{j,n})$ sont les coordonnées du vecteur v_j dans la base $\mathcal{B}$.
Si on note $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_p)$, on peut écrire : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \cdots, v_p) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Exemple : Soient $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (0, 4, 3)$ et $v_3 = (5, 1, 6)$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$.
Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Cas particulier : Pour toute base $\mathcal{B}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

PROPRIÉTÉ

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E, et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors :
$*$ $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$
$*$ $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.

2 Rappels sur les changements de bases

DÉFINITION

Soient $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (u'_1, \cdots, u'_n)$ deux bases de E. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Alors on dit que P est la **matrice de passage de la base** $\mathcal{B}$ **à la base** $\mathcal{B}'$, et on note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

PROPOSITION

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Soit v un vecteur de E. On pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$.
On a alors : $\boxed{X = PX'}$ ou $\boxed{X' = P^{-1}X.}$

Exercice 11 : Soit $P = X^3 + X^2 - 1 \in \mathbf{R}_3[X]$.
Déterminer les coordonnées de P dans la base (P_1, P_2, P_3, P_4) de l'exercice 10.