DM 6 - Corrigé

1. (a) Partant du sommet s, à l'aide de la fonction `choice`, on chosit au hasard un pas égal à -1 ou 1 qu'on ajoute à s pour obtenir un nouveau sommet. Si ce nouveau sommet est égal à p (resp. -1) alors on lui affecte la valeur 0 (resp. $p-1$) :

```python
def suivant(s,p):
    nouveau = s + rd.choice([-1,1])
    if nouveau == -1:
        return p-1
    elif nouveau == p:
        return 0
    else:
        return nouveau
```

(b) Pour simuler la variable T_p, on part de $s = 0$ et on fait un déplacement à l'aide de la fonction `suivant`, puis, tant que le sommet suivant n'est pas 0, on passe au sommet suivant et on incrémente un compteur de 1 :

```python
def T(p):
    s = suivant(0,p)
    nb = 1
    while s != 0:
        s = suivant(s,p)
        nb += 1
    return nb
```

(c) On calcule la moyenne de N réalisations de la variable aléatoire `T(p)` :

```python
def NbDeplMoyen(p):
    N = 1000
    somme = 0
    for _ in range(N):
        somme += T(p)
    return somme / N
```

(d)

```python
for p in [2,3,4,10,30,50]:
    print("p=",p,"nombre moyen de deplacements"=,NbDeplMoyen(p))
```

Dans la console, on obtient :

```
p = 2 , temps moyen =  2.0
p = 3 , temps moyen =  2.949
p = 4 , temps moyen =  3.93
p = 10 , temps moyen =  10.126
p = 30 , temps moyen =  30.644
```

On peut alors penser que, en moyenne, le nombre de déplacements pour rejoindre 0 est égal à p.

2. (a) T_3 est égal au nombre de déplacements effectués avant de retourner en 0. Partant de A, la fourmi va nécessairement en B ou C au premier pas, donc $T_3(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, d'où $(T_3 - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(T_3 - 1 = n) = (T_3 = n+1) = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \cap A_{n+1}$.
D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_3 - 1 = n) &= \mathrm{P}(\overline{A_1}) \times \mathrm{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \ldots \mathrm{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}}(\overline{A_n}) \times \mathrm{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

car à tout instant revenir en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ car, étant en B (resp. C) elle passe en A ou C (resp. A ou B) avec équiprobabilité.
On en déduit que :

$$\boxed{T_3 - 1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2}.}$$

Remarque : $T_3 - 1$ est alors le rang du premier retour à 0 à partir du deuxième pas. Or, la fourmi peut à tout instant revenir en A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ car, étant en B (resp. C) elle passe en A ou C (resp. A ou B) avec équiprobabilité.

(b) Comme $T_3 - 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, $E\left(T_3 - 1\right) = \frac{1}{1/2} = 2$.
Par linéarite de l'espérance, $E\left(T_3\right) - 1 = 2$, donc $E\left(T\right) = 3$.

$$\boxed{\text{Le temps moyen pour retourner en } A \text{ est } 3.}$$

3. (a) D'après l'énoncé, la fourmi démarre en A donc $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$. Alors, $U_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Pour tout entier naturel n, (A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'événements.
La formule des probabilités totales permet d'écrire :
$P\left(A_{n+1}\right) = P\left(A_n\right) P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(B_n\right) P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(C_n\right) P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(D_n\right) P_{D_n}\left(A_{n+1}\right)$.
Or, d'après l'énoncé,

$$P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) = P\left(C_n\right) P_{C_n}\left(A_{n+1}\right) = 0 \quad \text{et} \quad P\left(B_n\right) P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) = P\left(D_n\right) P_{D_n}\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $P\left(A_{n+1}\right) = \frac{1}{2} P\left(B_n\right) + \frac{1}{2} P\left(D_n\right)$ soit $a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} d_n$.
De la même manière, on obtient $b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n$, $c_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} d_n$, $d_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n$.
On a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = M U_n \text{ avec } M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(b) La matrice M est symétrique et à coefficients réels.

$$\boxed{\text{Donc } M \text{ est diagonalisable.}}$$

(c) On calcule MX_1, MX_2, MX_3 et MX_4 et on trouve $MX_1 = -X_1$, $MX_2 = MX_3 = 0$ et $MX_4 = X_4$.

$$\boxed{X_1,\ X_2,\ X_3 \text{ et } X_4 \text{ sont des vecteurs propres de } M \text{ associés aux valeurs propres } -1,\ 0,\ 0 \text{ et } 1.}$$

Comme $\dim\left(\mathscr{M}_{4,1}\left(\mathbb{R}\right)\right) = 4$, on en déduit que $E_{-1}\left(M\right) = \mathrm{Vect}\left(X_1\right)$, $E_0\left(M\right) = \mathrm{Vect}\left(X_2, X_3\right)$ (car X_2 et X_3 ne sont pas colinéaires) et $E_1\left(M\right) = \mathrm{Vect}\left(X_4\right)$ et donc que (X_1, X_2, X_3, X_4) est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{4,1}\left(\mathbb{R}\right)$ constituée de vecteurs propres de M.
En posant Q la matrice de passage de la base canonique à cette base :

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = Q^{-1} M Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(d) Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$

$$U_0 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcll} \alpha_1 + \alpha_2 \qquad + \alpha_4 & = & 1 & L_1 \\ -\alpha_1 \qquad + \alpha_3 + \alpha_4 & = & 0 & L_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \qquad + \alpha_4 & = & 0 & L_3 \\ -\alpha_1 \qquad - \alpha_3 + \alpha_4 & = & 0 & L_4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcll} \alpha_1 + \ \alpha_2 \qquad + \ \alpha_4 & = & 1 & \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -2\alpha_2 \qquad\qquad & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 & = & 1 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}\right.$$

$$U_0 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcll} \alpha_1 + \ \alpha_2 \qquad + \ \alpha_4 & = & 1 & \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 & = & 1 & \\ -2\alpha_2 \qquad\qquad & = & -1 & \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 & = & 1 & L_4 \leftarrow (L_4 + L_2)/2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 1/4 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Donc : } U_0 = \frac{1}{4} X_1 + \frac{1}{2} X_2 + \frac{1}{4} X_4.}$$

(e) On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (-1)^n \alpha_1 X_1 + \alpha_4 X_4$.

Initialisation : cas $n = 1$

$U_1 = MU_0 = \alpha_1 MX_1 + \alpha_2 MX_2 + \alpha_3 MX_3 + \alpha_4 MX_4 \underset{3.(c)}{=} -\alpha_1 X_1 + \alpha_4 X_4$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_n = (-1)^n \alpha_1 X_1 + \alpha_4 X_4$.

$$U_{n+1} = MU_n = (-1)^n \alpha_1 MX_1 + \alpha_4 MX_4 \underset{3.(c)}{=} (-1)^{n+1} \alpha_1 X_1 + X_4.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, U_n = (-1)^n \alpha_1 X_1 + \alpha_4 X_4.}$$

(f) D'après ce qui précède,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{2n} = c_{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b_{2n} = d_{2n} = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+1} = c_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2n+1} = d_{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que la fourmi se trouve équiprobablement en B ou D après un nombre impair de déplacements, équiprobablement en A ou C après un nombre pair de déplacements.

En particulier, $T_4(\Omega) = \{2n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = 2\mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$[T_4 = 2n] = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n-1}} \cap A_{2n}$$

donc, d'après la formule des probabilités composées,

$$P(T_4 = 2n) = P\left(\overline{A_1}\right) P_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right) \cdots P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n-1}}}(A_{2n}).$$

Or : $P\left(\overline{A_1}\right) = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k-1}}}\left(\overline{A_{2k}}\right) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k}}}\left(\overline{A_{2k+1}}\right) = 1$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } T_4(\Omega) = 2\mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, P(T_4 = 2n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

(g) T_4 admet une espérance si la série $\sum 2n\,\mathrm{P}(T_4 = 2n)$ est absolument convergente.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|2nP\left(T_4 = 2n\right)| = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

On reconnait le terme général d'une série géométrique dérivée première convergente car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.
Ainsi, T_4 admet une espérance et

$$E\left(T_4\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nP\left(T_4 = 2n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

$\boxed{\text{Conclusion : le temps moyen pour rejoindre } A \text{ est } 4.}$

Remarque : pour $p = 3$ et $p = 4$, la conjecture faite en 1.(d) est vérifiée.