DM 6

Soit p un entier naturel supérieur ou égal 2.
Une fourmi se déplace sur un polygone à p sommets numérotés de 0 à $p-1$.
La fourmi démarre au sommet numéroté 0 et, à chaque instant, elle avance au hasard sur l'un des sommets voisins de celui sur lequel elle se trouve.
On note T_p la variable aléatoire égale au nombre de déplacements effectués avant de retourner au sommet numéroté 0.

1. (a) Écrire en Python une fonction `suivant(s,p)` d'arguments le numéro s d'un sommet et l'entier $p \geqslant 2$, qui renvoie le numéro du sommet où arrive la fourmi après un déplacement partant de s.
   (b) Écrire en Python une fonction `T(p)` d'argument un entier $p \geqslant 2$ et qui simule la variable T_p.
   (c) Écrire en Python une fonction `NbDeplMoyen(p)` d'arguments un entier $p \geqslant 2$, qui renvoie une estimation du nombre moyen déplacement avant de retourner en 0.
   (d) Conjecturer un lien entre p et le nombre moyen de déplacements pour rejoindre 0.

2. Dans cette question, la fourmi se déplace sur un triangle ABC, la fourmi démarre de A (sommet 0).
   (a) Justifier que la variable $T_3 - 1$ suit une loi géométrique et en donner le paramètre.
   (b) Donner le temps moyen pour retourner en A.

3. Dans cette question, la fourmi se déplace sur un carré $ABCD$, la fourmi démarre de A (sommet 0).
   Pour tout $n \in N$, on note A_n (resp. B_n, C_n, D_n) l' événement « la fourmi est en A (resp. B, C, D) après n déplacements ».
   On pose $a_n = \mathrm{P}(A_n)$, $b_n = \mathrm{P}(B_n)$, $c_n = \mathrm{P}(C_n)$, $d_n = \mathrm{P}(D_n)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer U_0 et une matrice M telle que pour tout $n \in N$, $U_{n+1} = MU_n$.
   (b) Justifier que M est diagonalisable.
   (c) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que X_1, X_1, X_3 et X_4 sont des vecteurs propres de M et préciser les valeurs propres associées. Donner alors une matrice inversible Q et une matrice diagonale D telles que $D = Q^{-1}MQ$.
   (d) Déterminer des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ tels que $U_0 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4$.
   (e) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (-1)^n \alpha_1 X_1 + \alpha_4 X_4$.
   (f) En déduire la loi de T_4.
   (g) Calculer le temps moyen pour rejoindre A.