DM 7

On note E l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère les quatre matrices de E :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B} = (I, J, K, L)$ est une base de E.
   Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}_c$ de E à la base $\mathscr{B}$.

2. On pose $F_1 = \mathrm{Vect}(I, J)$ et $F_2 = \{M \in E \,|\, JMJ = -M\}$.
   (a) Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base et la dimension de F_1.
   (b) i. Montrer que F_2 est un sous-espace vectoriel de E.
   ii. Montrer que (K, L) est une base de F_2.

3. (a) Écrire en python une fonction `prod(A,B)` qui prend en argument deux matrices carrées A et B de même taille et qui renvoie la matrice obtenue en effectuant le produit AB sans utiliser la fonction `np.dot(A,B)`.
   (b) Dans la console, tester l'expression `A==B` pour différentes matrices A et B de même taille.
   En déduire la nature de l'expression `A==B`.
   (c) Écrire une fonction `dansF2(M)` qui prend en argument une matrice $M \in E$ et qui renvoie le booléen `True` si la matrice M appartient à F_2, `False` sinon.
   On remarquera que pour une matrice `M` *dont les coefficients sont des booléens, la fonction :*
   - `np.any(M)` *renvoie* `True` *si l'un des coefficients de* `M` *vaut* `True`.
   - `np.all(M)` *renvoie* `True` *si tous les coefficients de* `M` *valent* `True`.

4. (a) Montrer que F_1 est stable par produit matriciel, c'est-à-dire que : $\forall\, (M, M') \in F_1^2,\ MM' \in F_1$.
   (b) Montrer que : $\forall\, (M, M') \in F_2,\ MM' \in F_1$.

5. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de A dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En déduire un couple (A_1, A_2) de $F_1 \times F_2$ tel que $A = A_1 + A_2$.
   (c) Soit $M \in E$. Justifier qu'il existe un couple $(M_1, M_2) \in F_1 \times F_2$, qu'on ne cherchera pas à calculer, tel que $M = M_1 + M_2$.
   (d) Montrer qu'un tel couple est unique.