

A. Préliminaire : Étude d'une fonction polynomiale

1. a) La fonction Q est polynomiale, en particulier dérivable sur $\mathbf{R}$. Sa dérivée est le polynôme $Q' = 3(X^2 - 1) = 3(X - 1)(X + 1)$, d'où l'on déduit aisément le signe et les racines de Q' , ce qui donne le tableau :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$Q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$Q(x)$	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$			

Les limites de Q en $\pm\infty$ sont obtenues en utilisant qu'un polynôme non nul est équivalent à l'infini à son monôme de plus haut degré.

- b) Pour $x \in I_1 =]-\infty, 1]$, $Q(x) \leq -1 < 0$, donc Q ne s'y annule pas. Comme sur l'intervalle $I_2 =]1, +\infty[$, Q est continue, strictement croissante (car à dérivée *strictement* positive), elle réalise une bijection de I_2 sur son image $J =]-5, +\infty[$. Comme $0 \in J$, on conclut que Q admet une unique racine réelle r sur J , et donc aussi sur $I_1 \sqcup I_2 = \mathbf{R}$.
- c) L'inégalité $-1 < 0 < 15$ se réexprime en termes de Q en : $Q(2) < Q(r) < Q(3)$. Puisque la bijection réciproque de $Q|_{I_2}$ est aussi strictement croissante par le théorème de la bijection continue, on déduit : $2 < r < 3$.
- d) D'après le cours sur les polynômes, Q se factorise en $Q = (X - r)R$ où $R \in \mathbf{R}[X]$ est un trinôme sans racines réelles. On en déduit, puisque R est à coefficients réels, que R possède deux racines non réelles *et* conjuguées.
2. a) Puisque Q est de coefficient dominant égal à 1, d'après le cours, la factorisation de Q est $Q = (X - r)(X - z)(X - \bar{z})$.
- b) D'une part, par définition de Q , $Q(0) = -3$ et d'après la question précédente : $Q(0) = -rz\bar{z} = -r|z|^2$.
- c) Puisque $r|z|^2 = 3$, on peut diviser par $r > 0$ ce qui donne : $|z|^2 = \frac{3}{r}$. Comme $r > 2$, en minorant le dénominateur : $|z|^2 = \frac{3}{r} < \frac{3}{2} < 4 < r^2$, ce qui donne bien $|z|^2 < r^2$.

B. Simulation numérique du modèle

3. Par définition des effectifs, et du fait que les catégories d'âges sont disjointes, pour tout entier n , on a $t_n = i_n + m_n + d_n + s_n$.
4. Les nouveaux éléphants d'une génération donnée ne proviennent que des éléphants féconds de la génération précédente, qui sont les matures, et les déclinants. Comme chaque individu de ces catégories produit 3 petits, on a bien $i_{n+1} = 3d_n + 3m_n$.
- 5.

```
for k in range(n):
    i,m,d,s = 3*(m+d),i,m,d # affectations simultanées
    I.append(i)
    M.append(m)
    D.append(d)
    S.append(s)
```

6. On s'appuie sur le fait qu'à tout rang n , $t_n = i_n + m_n + d_n + s_n$:

```
def total(n):
    I,M,D,S = effectifs(n)
    return I[-1]+M[-1]+D[-1]+S[-1]
```

7. On est loin du total estimé par Darwin! Même en supposant artificiellement que chaque éléphant produit 3 couples d'éléphants mâle et femelle, on arrive à l'ordre de grandeur du million et non pas de la dizaine de millions. Darwin a dû se tromper, puisque l'on est parti de son modèle d'après 4.. À sa décharge, il n'est pas mathématicien, et ne disposait pas d'outils de calculs aussi élaborés que ceux du 21ème siècle ¹.

C. Approche matricielle

8. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par propriétés du calcul matriciel : $X_{n+1} = AX_n$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Par décrétements successives : $X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = \dots = A^nX_0$.

9. a) La matrice $A = A - 0I_4$ n'est pas inversible puisqu'elle contient une colonne nulle. On déduit que 0 est valeur propre de A .

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a $A - \lambda I_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & B_\lambda & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{array} \right)$ où $B_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 3 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Comme

on a supposé $\lambda \neq 0$, $\text{rg}(A - \lambda I_4) = 1 + \text{rg}(B_\lambda)$, donc λ est valeur propre de non nulle de A si et seulement si $\text{rg}(B_\lambda) < 3$ (c'est-à-dire λ est valeur propre de $B_\lambda + \lambda I_3$). Calculons le rang de B_λ par pivot :

$$B_\lambda \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \ell_1 \leftrightarrow \ell_2 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3 - \lambda^2 & 3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \ell_2 \leftarrow \ell_2 + \lambda \ell_1.$$

Ainsi B_λ est non inversible si et seulement si le déterminant $\delta = \begin{vmatrix} 3 - \lambda^2 & 3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$ est nul, mais en le développant, on voit que $\delta = \lambda^3 - 3\lambda - 3 = Q(\lambda)$.

1. Par son importance historique en sciences de la vie, l'exemple des éléphants de Darwin est très souvent utilisé à titre d'illustration dans des cours, ou même des publications scientifiques. Pourtant, ce chiffre de 15 000 000 d'éléphants n'est jamais vraiment critiqué, ni même discuté mathématiquement. Or, il semblerait, d'après les historiens et les manuscrits à disposition (voir *How Fast Does Darwin's Elephant Population Grow?*, dans *Journal of the History of Biology* 2017, et disponible en ligne : <http://dx.doi.org/10.1007/s10739-017-9488-5>), que Darwin a réécrit et modifié son modèle de nombreuses fois avant sa publication dans *l'origine des espèces*. Les historiens ajoutent que Darwin, apprenant qu'un naturaliste contemporain dénommé Alfred Wallace, travaillait à mettre au point une théorie semblable à la sienne, se serait hâté de finaliser son manuscrit pour publication. Dans la précipitation, le texte final de Darwin mélange des chiffres/hypothèses issus de modèles et conditions initiales différents. Plus tard, les premiers lecteurs de *l'origine des espèces* auraient fait remonté à l'éditeur qu'ils obtenaient sous les hypothèses de Darwin des résultats numériques complètement différents de ceux annoncés dans son livre. Se reporter à l'article cité pour les détails. Je précise que je n'avais pas connaissance de cet article au moment où ce sujet de DS été rédigé!

- c) En mettant ensemble les résultats des questions 9. a), 9. b) et 1. c), on en déduit que le spectre de A est $\{0, r, z, \bar{z}\}$.
- d) La matrice A est de taille 4×4 et possède 4 valeurs propres distinctes. D'après le cours, elle est diagonalisable, et ses sous-espaces propres de A sont de dimension 1.
10. Soit P une matrice inversible de $M_4(\mathbb{C})$ telle que $A = P \times D \times P^{-1}$, où $D = \text{diag}(0, r, z, \bar{z})$. Cette matrice P ne dépend pas de n . Un calcul classique donne que pour tout entier naturel n non nul, on a $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$. Ensuite, en remarquant que $D^n = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & r^n & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & z^n & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & & \bar{z}^n \end{pmatrix}$, on a par règles du calcul matriciel : $A^n = \underbrace{r^n P \text{diag}(0, 1, 0, 0) P^{-1}}_{M_1} + \underbrace{z^n P \text{diag}(0, 0, 1, 0) P^{-1}}_{M_2} + \bar{z}^n P \text{diag}(0, 0, 0, 1) P^{-1}$ et les matrices M_1, M_2, M_3 ainsi définies sont bien indépendantes de n .
11. a) De la relation précédente, on tire, avec 8. b) que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = r^n M_1 X_0 + z^n M_2 X_0 + \bar{z}^n M_3 X_0$. La somme des coefficients de chacune des trois colonnes du membre de droite vaut t_n . Avec les notations du sujet, on a donc avec l'inégalité triangulaire : $t_n \leq r^n \times \underbrace{(s_{M_1 X_0} + s_{M_2 X_0} + s_{M_3 X_0})}_{\text{une constante positive qu'on nomme } K}$.
- b) Le fait que $C > 0$ indique que dans ce modèle, il n'y a *jamais* extinction de la population, et que la croissance de la population est malthusienne (ce qui est cohérent avec l'absence de prédation ou de migration, et d'hypothèses éventuelles sur la limitation en ressources disponibles).

II Modèle probabiliste de Galton-Watson (1874)

D. Description modèle de Galton-Watson et simulation

12. Sur l'arbre, l'ancêtre unique de génération 0 a deux descendants, donc l'évènement $[T_1 = 2]$ est observé. À la génération 2, l'effectif total est 4 : $[T_2 = 4]$ est réalisé, et enfin on observe à la génération suivante la réalisation de $[T_3 = 6]$.
13. a) Puisque l'élément $L[k]$ de la liste L donne la valeur observée de T_k , on réalise, au tour de boucle k , $L[k]$ réalisations de X que l'on cumule dans la variable T . Ce qui donne :

```

1 def processus(n):
2     L=[1]
3     for k in range(1,n+1):
4         T = 0
5         for _ in range(L[k]):
6             X = repro()
7             T+=X
8         L.append(T)
9     return L

```

- b) Le modèle probabiliste semble produire des données non monotones, alors que les suites (t_n) du modèle déterministe sont asymptotiquement à croissance malthusienne, si l'on admet bien sûr l'équivalent de la suite (t_n) donnée en **11. b)**. Enfin, contrairement au modèle déterministe, l'extinction de la population ici n'est pas impossible (au sens probabiliste du terme).

E. Étude de la suite des probabilités d'extinction à une génération donnée

14. Puisque $t \in [0, 1]$, $\forall k \in \mathbf{N}$ $0 \leq P(X = k)t^k \leq P(X = k)$. D'après le critère de convergence des séries à termes positifs, puisque la série de terme général $P(X = k)$ converge (vers 1 par définition de fonction de masse), $f(t)$ existe pour $t \in [0, 1]$.

15. Par définition, $f(0) = P(X = 0)$. Ensuite, d'après la formule des probabilités composées : $P(T_1 = 0) = P_{[T_0=1]}(T_1 = 0)P(T_0 = 1) = P_{[T_0=1]}(T_1 = 0)$ par **(H3)**. Par définition de la loi de reproduction **(H4)**., $P_{[T_0=1]}(T_1 = 0) = P(X = 0)$. Ainsi, $q_1 = P(T_1 = 0) = P(X = 0)$. Avec le constat du début de la question, $q_1 = f(0)$, mais $0 = q_0$ d'après la loi de T_0 qui est certaine de paramètre 1, d'où $q_1 = f(q_0)$.

16. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système quasi-complet d'évènements associé à la variable T_1 , la série de terme général $P_{[T_1=k]}(T_{n+1} = 0)P(T_1 = k)$ converge et sa somme vaut $P(T_{n+1} = 0)$:

$$q_{n+1} = P(T_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{[T_1=k]}(T_{n+1} = 0)P(T_1 = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_n^k P(T_1 = k) = f(q_n).$$

17. a) Simple reformulation de l'hypothèse **(H2)**.
b) De la question précédente, on tire en passant aux probabilités que la suite (q_n) est croissante (et majorée par 1 puisque c'est une suite de probabilités).
c) Pour $k \geq 1$, on $Z_k = Q_k \setminus Q_{k-1}$. En effet, dire que l'extinction est observée pour la première fois à la génération k revient à dire qu'elle est observée à la génération k et jamais avant, ainsi : $Z_k = Q_k \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{k-1})$. On simplifie le deuxième terme de cette différence d'ensembles en se souvenant que $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_{k-1}$, et donc que $Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{k-1} = Q_{k-1}$.
d) Par définition, les Z_k sont deux à deux incompatibles, donc par σ -additivité, la série de terme général $P(Z_k)$ converge, et sa somme vaut $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_k\right)$, d'où $P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k)$. Mais par inclusion, $P(Z_k) = P(Q_k) - P(Q_{k-1}) = q_k - q_{k-1}$. On conclut par télescopage, et avec $q_0 = 0$. Comme l'évènement Q est aussi l'évènement $\bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_k$, et que $q_k \rightarrow q$, on conclut que $P(Q) = q$.

F. Calcul de la probabilité d'extinction de la population

18. Puisque par définition de réunion, $Q_1 \subset Q$, on a, par croissance de P : $q_1 \leq P(Q)$. Or $q_1 \stackrel{q_0=0}{=} f(0) = e^{-\mu}$. Ainsi $P(Q) \geq e^{0 \times \mu} > 0$: l'évènement Q n'est pas quasi-impossible, ce qui confirme les observations de **13. b)**.

19. Soit $t \in \mathbf{R}$. Le terme général de la série définissant $f(t)$ est $e^{-\mu} \times \frac{(\mu t)^k}{k!}$. C'est, à un facteur $e^{-\mu}$ près, le terme général d'une série exponentielle, donc convergente, et de somme $e^{-\mu} \times e^{\mu t}$. Ainsi, le réel $f(t)$ existe et on a bien $f(t) = e^{\mu(t-1)}$ pour tout réel t .
20. Comme la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$, par passage à la limite dans la relation $q_{n+1} = f(q_n)$ vraie à tout rang, et parce que les suites (q_n) et (q_{n+1}) convergent vers q , on a bien $f(q) = q$.
21. a) D'après l'expression de $f(t)$, $f(1) = e^{\mu \times 0} = 1$.
- b) Comme la fonction logarithme est bijective, il est vrai que pour $t \in]0, 1]$, $f(t) = t$ équivaut à $\ln f(t) = \ln t$, ce qui signifie : $g(t) = 0 \Leftrightarrow \varphi(t) = 0$.
- c) Comme somme de fonctions dérivables sur $]0, 1]$, φ est dérivable sur $]0, 1]$ et les règles de calcul sur la dérivation donnent : $\forall t \in]0, 1]$ $\varphi'(t) = \frac{\mu t - 1}{t}$. La règle des signes donne aisément le tableau suivant, et les limites aux bornes s'obtiennent par opérations sur les limites :

t	0	$\frac{1}{\mu}$	1
$\varphi'(t)$	$-\infty$	0	$+$
$\varphi(t)$	$+\infty$	$\ln \mu + 1 - \mu$	0

Puisque $\mu > 1$, avec l'inégalité admise, $\ln \mu - (\mu - 1) < 0$. En appliquant encore le théorème de la bijection continue à φ sur chacun des intervalles $]0, 1/\mu]$ et $]1/\mu, 1]$ on déduit qu'il existe un unique réel ρ dans $]0, 1/\mu[$ tel que $\varphi(\rho) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(\rho) = \rho$ d'après 21.b).

22. a) La propriété $\rho \geq 0 = q_0$ initialise la récurrence. Si à un rang $n \geq 0$ il est vrai que $q_n \leq \rho$, alors par croissance visible de f sur $\mathbf{R}_+$, on obtient $q_{n+1} = f(q_n) \leq f(\rho) \stackrel{21.d)}{=} \rho$, d'où l'hérédité.
- b) D'après le théorème de convergence monotone, la limite de la suite (q_n) est son plus petit majorant, et la question précédente établit que ρ est un majorant de la suite. D'après 21.a) et 21.c) les seules limites possibles de (q_n) sont ρ et 1. Comme $\rho < 1$, $q = \rho$.
- c) Le nombre moyen d'éléphants engendrés par un individu est de 6. Comme l'espérance de la loi de reproduction est une loi $\mathcal{P}(\mu)$, il est cohérent de choisir $\mu = E(T_1) = 6$.
- d) Puisque $q < 1$ d'après 21.c), Q n'est pas quasi-certain. En mettant bout à bout les résultats de 18. et 22.a) : $q \in [e^{-\mu}, \frac{1}{\mu}]$.

Remarque. Une dichotomie (par exemple) donnerait que : $\rho \simeq 0,00252$. Mais déjà : $e^{-6} \simeq 0,00248$, et $e^{-\mu}$ est dans ce cas une bonne approximation de ρ .