

Programme de colles
Semaine 14 du 13/01 au 17/01/2025

Intégrales généralisées (impropres)

- Convergence d'une intégrale d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert.
- Cas d'une fonction définie sur un intervalle et continue sauf en un nombre fini de points.
- Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité en un point.
- Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.
- Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres.
- Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Cas des fonctions paires ou impaires.
- Théorème de comparaison de deux fonctions positives.
- Si deux fonctions positives sont équivalentes en b alors les deux intégrales, impropres en b , $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont de même nature.
- Convergence absolue d'une intégrale généralisée.
- La convergence absolue est une condition suffisante de convergence.
- L'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Variables aléatoires réelles (VAR) à densité : le début

- Densité de probabilité : f positive sur $\mathbf{R}$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que $\int_{\mathbf{R}} f$ converge et vaut 1.
- Variable aléatoire réelle à densité.
- Si f est une densité de probabilité, alors il existe une VAR à densité X dont f est une densité.
- Fonction de répartition d'une VAR de densité f_X : $\forall x \in \mathbf{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$
- Si I est un intervalle, expression de $\mathbf{P}(X \in I)$ à l'aide d'une intégrale portant sur f_X .
- Caractérisation d'une VAR à densité à l'aide de sa fonction de répartition F_X :
 X admet une densité ssi F_X est continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
 Dans ce cas, la fonction f obtenue en posant $f(t) = F'_X(t)$ lorsque c'est possible, et $f(t) = 0$ sinon est une densité de X .
- Exemples simples de composées d'une VAR à densité X par une fonction $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbf{R}$:
 - * on admet que $Y = g(X)$ est une VAR.
 - * Y est une VAR discrète ssi $Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
 - * Y admet une densité ssi F_Y vérifie la caractérisation précédente.

Questions de cours :

1. Définition de la convergence d'une intégrale généralisée $\int_a^b f$ si f est continue sur $[a, b[$.
2. Définition de la convergence d'une intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f$ si f est continue sur $[a, +\infty[$.
3. Donner la relation de Chasles pour les intégrales impropres.
4. Donner le théorème de comparaison pour les intégrales impropres.
5. Donner le théorème de convergence d'intégrales de fonctions équivalentes.
6. Définition de l'absolue convergence et du critère de convergence d'une intégrale généralisée.
7. Théorème d'intégration par parties pour une intégrale généralisée.
8. Donner la définition d'une densité de probabilité.
9. À quelles conditions sur sa fonction de répartition une VAR X admet-elle une densité ?
 Comment dans ce cas définir une densité de X ?