TP 9 : simulation de variables à densité

Il est souhaitable de disposer du formulaire python du concours Agro-Veto, et de papier pour calculer !

I Lois usuelles

■ Exercice 1.

1. Écrire une fonction `Unif(a,b)` dont l'exécution renvoie en sortie une simulation d'une variable aléatoire à densité d'une loi uniforme sur le segment $[a,b]$.
2. Écrire une fonction `expo(mu)` dont l'exécution renvoie en sortie une simulation d'une variable aléatoire à densité de loi exponentielle de paramètre μ.
3. Écrire une fonction `normale(mu,sigma)` dont l'exécution renvoie en sortie une simulation d'une variable aléatoire à densité de loi normale de paramètres μ, σ^2. *Utiliser le formulaire*

Le script suivant permet de représenter l'histogramme des fréquences d'une loi normale centrée réduite, ce qui donne l'allure d'une densité :

```
1 N = 100000                              # nombre de simulations
2 n = 50                                  # nombre de rectangles dans l'histogramme
3 L=[rd.gauss(0,1) for _ in range(N)]     # serie de N simulations
4 plt.hist(L,n,normed=True)               # normed = True : pour un histogramme de
5 plt.show()                              # frequences (somme des aires des batons = 1)
```

■ Exercice 2. Reproduire ce script, et constater qu'on a bien l'allure de densités conformes à celles du cours.

■ Remarque 1. Si vous avez un message d'avertissement en exécutant ce script, remplacez le nom d'option `normed` en ligne 4 par `density`.

II Exercices

■ Exercice 3.

1. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, simuler la variable $Z = \min(X, Y)$.
2. Calculer la loi de Z mathématiquement.
3. Montrer que la loi de Z est une loi exponentielle de paramètre α à préciser.
4. Constater en traçant les histogrammes des fréquences pour la variable Z et une variable de loi $\mathscr{E}(\alpha)$ la correction de votre réponse à **3.**

■ Exercice 4. Soit $\lambda > 0$ un réel, et f la fonction définie par : $f(x) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{\lambda}{x\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 1. \end{array} \right.$

1. Déterminer λ tel que f soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminer la loi de la variable alétaoire $Y = \ln X$.
3. En déduire une méthode de simulation de la variable Y.

M. Patel
2024-2025
Classes de B_2, Rennes

■ **Exercice 5.** Soit $a > 0$ un réel et f_a la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_a(x) = \dfrac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$.

1. Montrer que f_a est une densité.
2. Montrer que si U suit une loi uniforme sur $]0,1[$, alors la variable $Z = \tan\left(\pi U + \dfrac{\pi}{2}\right)$ est une variable à densité de densité f_1.
3. Simuler une variable aléatoire X de loi f_1.
4. Estimer informatiquement plusieurs fois l'espérance de la variable X. La variable X admet-elle une espérance ?
5. Soit $a > 0$. Simuler une variable de loi f_a.

■ **Exercice 6.** Soit $a \in \mathbf{R}$, $b > 0$ et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-a|}{b}\right).$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est une densité.
2. Soit U une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble fini $\{-1,1\}$. On suppose que U et V sont indépendantes. Montrer que la variable $X = a + bUV$ est à densité et admet pour loi la densité $f_{a,b}$.
3. Simuler la variable X de la question précédente.
4. Estimer empiriquement l'espérance et la variance de X.