DM 7 - corrigé

1. Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
Soit a, b, c, d des réels tels que $aI + bJ + cK + dL = 0$. Alors,

$$\begin{cases} a \quad + c \qquad = 0 & L_1 \\ \quad b \qquad + d = 0 & L_2 \\ \quad b \qquad - d = 0 & L_3 \\ a \quad - c \qquad = 0 & L_4 \end{cases}$$

En effectuant les opérations $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on trouve $a = b = c = d = 0$.
Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre.
Or :

$$\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = 4 = \dim E$$

$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est donc une base de E et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Remarque. On aurait aussi pu montrer que : $\mathrm{rg}(I, J, K, L) = \mathrm{rg}(P) = 4 = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim E$.

2. (a) F_1 est le sous-espace vectoriel engendré par (I, J), donc c'est un sous-espace vectoriel de E et (I, J) en est une famille génératrice. La famille (I, J) est libre en tant que sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}$.

$$\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E,\ (I, J) \text{ est une base de } F_1 \text{ et } \dim F_1 = 2.}$$

(b) i. Par définition, $F_2 \subset E$ et $O_2 \in F_2$.
Soit $(M, N) \in F_2^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors, par distributivité du produit matriciel,

$$J(\lambda M + \mu N) J = \lambda JMJ + \mu JNJ \underset{M,N \in F_2}{=} -\lambda M - \mu N = -(\lambda M + \mu N)$$

donc $\lambda M + \mu N \in F_2$.

$$\boxed{\text{On en conclut que } F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

ii. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$, $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} M \in F_2 \quad & \Leftrightarrow \quad JMJ = -M \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad a = -d \quad \text{et} \quad b = -c. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \{aK + bL,\ a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(K, L).$$

Les vecteurs K et L étant non colinéaires, la famille (K, L) est libre.

$$\boxed{(K, L) \text{ est une base de } F_2 \text{ et } \dim F_2 = 2.}$$

3. (a) On rappelle que pour des matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ carrées de tailles $n \in \mathbb{N}^*$, le produit AB est une matrice $C = (c_{ij})$ carrée de taille n telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

```python
import numpy as np

def prod(A,B):
    n = np.shape(A)[0]
    C = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            for k in range(n):
                C[i,j] += A[i,k] * B[k,j]
    return C
```

(b) On constate que pour des matrices A et B de même taille, l'expression `A==B` réalise le teste de comparaison des coefficients de A et B deux à deux et renvoie une matrice de même taille constituée de booléens valant `True` si les coefficients correspondants dans A et B sont égaux, `False` sinon.

(c) On calcule la matrice JMJ à l'aide de la fonction `prod`, et on teste si tous les coefficients des matrices JMJ et $-M$ sont égaux grâce à la commande `np.all`.

```python
def dansF2(M):
    J = np.array([[0,1],[1,0]])
    JMJ = prod(prod(J,M),J)
    return np.all(JMJ == -M)
```

4. (a) Soit $(M, M') \in F_1^2$. Montrons que $MM' \in F_1$.

Par définition de F_1, il existe des réels, a, b, a', b' tels que :

$$M = aI + bJ \quad \text{et} \quad M' = a'I + b'J.$$

Alors, en remarquant que $J^2 = I$:

$$MM' = (aI + bJ)(a'I + b'J) = aa'I + ab'J + ba'J + bb'J^2 = (aa' + bb')I + (ab' + ba')J \in F_1.$$

$$\boxed{F_1 \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$$

(b) Soit $(M, M') \in F_2^2$. Montrons que $MM' \in F_1$. D'après la question 2.(b), il existe des réels, a, b, a', b' tels que :

$$M = aK + bL \quad \text{et} \quad M' = a'K + b'L.$$

Alors, en remarquant que $K^2 = I$, $L^2 = -I$, $KL = J$ et $LK = -J$:

$$MM' = (aK + bL)(a'K + b'L) = aa'K^2 + ab'KL + ba'LK + bb'L^2 = (aa' - bb')I + (ab' - ba')J \in F_1.$$

$$\boxed{\forall (M, M') \in F_2^2,\ MM' \in F_1.}$$

5. (a) Soit a, b, c, d des réels tels que $A = aI + bJ + cK + dL$.

$$\left\{\begin{array}{lllll} a & +c & = & 3 & L_1 \\ & b \quad +d & = & -1 & L_2 \\ & b \quad -d & = & 1 & L_3 \\ a & -c & = & -2 & L_4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} a & +c & = & 3 & \\ & b \quad +d & = & -1 & \\ & 2b & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ 2a & & = & 1 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = \frac{5}{2} \\ d = -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}I + \frac{5}{2}K - L \text{ ou encore } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.}$$

Remarque. On aurait aussi pu utiliser le fait que :

$$P \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La détermination de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(A)$ repose alors sur la résolution du même système ou le calcul de P^{-1}.

(b) En posant $A_1 = \dfrac{1}{2}I$ et $A_2 = \dfrac{5}{2}K - L$, on a bien :

$$(A_1, A_2) \in F_1 \times F_2 \quad \text{tel que} \quad A = A_1 + A_2.$$

(c) Soit $M \in E$. La famille $\mathscr{B}$ étant une base de E, il existe des réels a, b, c, d tels que :

$$M = aI + bJ + cK + dL.$$

En posant $M_1 = aI + bJ$ et $M_2 = cK + dL$, on a bien :

$$\boxed{(M_1, M2) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } M = M_1 + M_2.}$$

(d) Pour montrer l'unicité de cette écriture, on va supposer qu'il existe :

- $(M_1, M_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $M = M_1 + M_2$
- $(N_1, N_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $M = N_1 + N_2$.

Alors, $M_1 + M_2 = N_1 + N_2$ et donc $M_1 - N_1 = N_2 - M_2$.
Or : $M_1 - N_1 \in F_1$ et $N_2 - M_2 \in F_2$, donc $M_1 - N_1 \in F_1 \cap F_2$.
Alors, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$M_1 - N_1 = aI + bJ \quad \text{et} \quad M_1 - N_1 = cK + dL.$$

On en déduit que $aI + bJ = cK + dL$, ou encore que $aI + bJ - cK - dL = 0$. La famille (I, J, K, L) étant libre, $a = b = c = d = 0$. Cela signifie que $M_1 = N_1$ et donc que $M_2 = N_2$.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } M \in E, \text{ il existe un unique couple } (M_1, M_2) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } M = M_1 + M_2.}$$

Remarque. Plus rapidement, on aurait aussi pu constater que si $M \in E$ s'écrit $M = M_1 + M_2$, avec $(M_1, M_2) \in F_1 \times F_2$, alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que :

$$M_1 = aI + bJ \quad \text{et} \quad M_2 = cK + dL.$$

Alors, $M = aI + bJ + cK + dL$ et donc a, b, c, d sont les coordonnées de la matrice M dans la base (I, J, K, L) ; ils sont donc définis de manière unique.