

DM 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2(x)} & \text{si } x \geq e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
 (b) Soit X une variable aléatoire de densité f . Déterminer la fonction de répartition de X .
 (c) Montrer que X n'admet pas d'espérance ni de variance.
On rappelle que $\ln(x) \leq x$ pour tout réel x strictement positif.

2. (a) Montrer que la fonction suivante permet de simuler la variable aléatoire X :

```

1 import random as rd
2
3 def X():
4     return exp(1/(1-rd.random()))

```

- (b) Écrire une fonction `liste(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie sous forme d'une liste les simulations de n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes de même loi que X .
3. Pour tout réel $x > e$, on note U_x la variable qui compte le nombre de fois que, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $(X_i < x)$ est réalisé.
 Montrer que U_x suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
4. Soit Y_n la variable aléatoire égale au second minimum des X_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, lorsque les X_i sont classées dans l'ordre croissant (au sens large).
 - (a) Écrire une fonction `Y(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui simule la variable aléatoire Y_n .
 - (b) Déterminer la fonction de répartition G_n de la variable aléatoire Y_n .
On pourra exprimer $[Y_n \leq x]$ à l'aide de $[U_x \geq 2]$.
 - (c) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et que la fonction g_n définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{x \ln^n(x)} \left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } x \geq e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est une densité de probabilité de Y_n .

- (d) On note $Z_n = \ln(Y_n)$. Montrer que pour $n \geq 3$, Z_n admet une espérance et la calculer.