

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

I Rappels sur les applications linéaires

1 Définition

DÉFINITION

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbf{K}$ -ev. On considère $f : E \rightarrow F$.

On dit que f est une **application linéaire** de E dans F (ou *morphisme*) lorsque :

- $\forall u, v \in E, \quad f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u)$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, F)$ ou simplement $\mathcal{L}(E, F)$.

Cas particuliers :

- Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
- Si $f : E \rightarrow E$ est linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
Leur ensemble est noté $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E)$ ou simplement $\mathcal{L}(E)$.
- Si $f : E \rightarrow E$ est linéaire et bijective, on dit que f est un **automorphisme**.
Leur ensemble est noté $\mathcal{GL}_{\mathbf{K}}(E)$ ou simplement $\mathcal{GL}(E)$.
- $f \in \mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, \mathbf{K})$ est appelée une **forme linéaire**. Leur ensemble se note aussi : $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}(E, \mathbf{K}) = E^*$.

PROPOSITION ** Caractérisation d'une application linéaire **

$f : E \rightarrow F$ est linéaire si et seulement si : $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

PROPOSITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors : * $f(0_E) = 0_F$.

$$* \forall \lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbf{K}, \forall u_1, \dots, u_q \in E, \quad f\left(\sum_{i=1}^q \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^q \lambda_i f(u_i).$$

Par contraposée : si $f(0_E) \neq 0_F$, alors f n'est pas linéaire.

DÉFINITION

Soient E, F deux $\mathbf{K}$ -ev. S'il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$, alors on dit que E et F sont **isomorphes**.

2 Exemples

- Soit $a \in \mathbf{R}$. La fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = ax$ est linéaire : $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R})$.

- Soit $k \in \mathbf{K}$. L'application $h_k : \begin{cases} E \rightarrow E \\ u \mapsto ku \end{cases}$ est appelée **homothétie de E de rapport k** .

h_k est un endomorphisme de E . Si $k \neq 0$, alors h_k est de plus un automorphisme de E : $(h_k)^{-1} = h_{\frac{1}{k}}$.

- $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + 2y, -x, 3y) \end{cases}$ est une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$.

- $f : \begin{cases} \mathcal{C}^0([a, b]) \rightarrow \mathbf{R} \\ f \mapsto \int_a^b f \end{cases}$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$, le $\mathbf{R}$ -ev des fonctions continues sur $[a, b]$.

- $d : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ est linéaire : $d \in \mathcal{L}(E)$ où $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$.

- Soit E l'ensemble des suites réelles (u) de série convergente. Alors $s : (u) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est linéaire.

- Soit E l'ensemble des VAR définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ et admettant une espérance.
Alors l'espérance est une forme linéaire sur E .

3 Applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$

$f : \mathbf{K}^p \rightarrow \mathbf{K}^n$ est linéaire si et seulement si : $f(x_1, \dots, x_p) = \left(\sum_{j=1}^p a_{1,j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^p a_{n,j} x_j \right)$

où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,j} \in \mathbf{K}$.

4 Somme d'applications linéaires, produit par une constante

PROPOSITION

$\mathcal{L}(E, F)$ est stable par combinaisons linéaires. $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ -ev, sev de $(\mathcal{F}(E, F), +, \cdot)$.

On retient :

Si f et g sont linéaires, si $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est linéaire.

5 Composition d'applications linéaires

PROPOSITION

- La composée d'applications linéaires est une application linéaire.
- Si f est un isomorphisme, alors f^{-1} est une application linéaire.

preuve :

COROLLAIRE

- La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.
- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

II Noyau et image d'une application linéaire

1 Images directes et réciproques d'un s-ev par une application linéaire

PROPOSITION

Soient E, F , deux $\mathbf{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Pour tout s-ev E_1 de E , l'ensemble $f(E_1)$ est un s-ev de F .
- Pour tout s-ev F_1 de F , l'ensemble $f^{-1}(F_1)$ est un s-ev de E .

On retient : Les images directes et réciproques de s-ev par une application linéaire sont des s-ev.

preuve :

2 Noyau et image d'une application linéaire

DÉFINITION

Soient E, F , deux $\mathbf{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau** de f , et on note $\text{Ker}(f)$ l'ensemble des vecteurs de E d'image 0_F :
$$\text{Ker}(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$
- On appelle **image** de f , et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E :
$$\text{Im}(f) = \{v \in F, \exists u \in E, v = f(u)\} = \{f(u), u \in E\} = f(E)$$

À retenir : Déterminer le noyau d'une application linéaire f , c'est résoudre l'équation $f(u) = 0$.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbf{R}[X] \rightarrow \mathbf{R}[X]$ définie par : $\forall P \in \mathbf{R}[X], f(P) = XP' - 2P$.

Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}[X])$, et déterminer le noyau et l'image de f .

PROPOSITION

Soient E, F , deux $\mathbf{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- $\text{Ker } f$ est un s-ev de E .
- $\text{Im } f$ est un s-ev de F .

3 Injectivité et surjectivité des applications linéaires

PROPOSITION

Soient E, F deux $\mathbf{K}$ -ev, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0_E\}$.
- f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im } f = F$.

preuve :

Exercice 2 : soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (-x + y, 2x - y) \end{cases}$. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f .

III Action d'une application linéaire sur une base

1 Slogan

THÉORÈME

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors toute application de $\mathcal{B}$ dans F se prolonge de façon unique en une application linéaire de E dans F .

On retient :

Une application linéaire est entièrement déterminée par son action, par ailleurs arbitraire, sur une base.

COROLLAIRE

Tout $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. On considère l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ telle que $f(e_1) = (2, 5, 0)$ et $f(e_2) = (-1, 1, 4)$. Déterminer $f(u)$ pour tout $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

2 Rang d'une application linéaire

PROPRIÉTÉ

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Alors :

- f est injective si, et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F .
- f est surjective si, et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F .
- f est bijective si, et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

COROLLAIRE

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie. Alors :

- si f est injective, alors F est de dimension infinie, ou de dimension finie avec $\dim E \leq \dim F$.
- si f est surjective, alors F est de dimension finie et $\dim E \geq \dim F$.
- si f bijective, alors F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.

preuve :

Exemples : il n'existe aucune injection ni bijection de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$, mais il existe des surjections.

Il n'existe aucune surjection ni bijection de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^5$, mais il existe des injections.

Il existe une bijection de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ si et seulement si $n = p$.

Si E et F sont isomorphes, alors E et F sont de dimensions infinies, ou E et F sont de dimensions finies et $\dim(E) = \dim(F)$.

DÉFINITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\text{Im}(f)$ est un s-ev de F de dimension finie. Alors on appelle **rang** de f , et on note $\text{rg}(f)$, la dimension du s-ev $\text{Im}(f)$. Si $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E , alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(\mathcal{B})) = \dim(\text{Im } f)$.

Exercice 4 : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y + z, -x + y - z) \end{cases}$. Déterminer le rang de f .

3 Caractérisation des applications linéaires par leur rang

THÉORÈME

** Théorème du rang **

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.

Alors : $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim E$, ou encore : $\dim(\text{Ker } f) + \text{rg}(f) = \dim E$.

preuve :

Exercice 5 : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x) \end{cases}$. Déterminer $\text{Ker } f$ et en déduire le rang de f .

PROPOSITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E, F de dimensions finies p et n . Alors :

- * $\text{rg}(f) \leq n$, et f est surjective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = n$.
- * $\text{rg}(f) \leq p$, et f est injective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = p$.
- * f est bijective $\Leftrightarrow \text{rg}(f) = n = p$.

En particulier, si $\dim E = \dim F$ alors : f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.

preuve :

Exercice 6 : Montrer que $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (3x + z, y + 2z, x + y + z) \end{cases}$ est bijective.

Attention : le résultat est faux pour les endomorphismes en dimension infinie.

Contre-exemple : on pose $E = \mathbf{R}[X]$ et on considère $d : P \mapsto P'$.

IV Représentations matricielles

Dans tout ce paragraphe, E, F et G sont des $\mathbf{K}$ -ev de dimensions finies.

1 Matrice d'une application linéaire

DÉFINITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F .
On appelle **matrice de l'application linéaire f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** la matrice de la famille $f(\mathcal{B})$ dans la base $\mathcal{B}'$. On la note $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,p} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots & \lambda_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \cdots & \lambda_{n,p} \end{pmatrix} \iff \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad f(e_j) = \lambda_{1,j}.e'_1 + \cdots + \lambda_{n,j}.e'_n$$

Cas particuliers :

- Si f est un endomorphisme de E , on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$. C'est une matrice carrée.
- Si f est une forme linéaire, alors la matrice de f est une matrice-ligne.
- Soit E un espace vectoriel de dimension n , et muni d'une base $\mathcal{B}$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$

Exercice 7 : Donner la matrice de $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y, 3y) \end{cases}$ dans les bases canoniques.

PROPOSITION

| Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E et F , on a : $\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))$.

2 Image d'un vecteur par une application linéaire

PROPOSITION

| Soient E, F deux $\mathbf{K}$ -ev de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$. Alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
En notant $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u))$, alors : $Y = AX$

preuve :

Remarque : Cette formule généralise la formule de linéarité en dimension 1 : $y = ax$.

Exercice 8 : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y, 3y) \end{cases}$.

1. Rappeler la matrice A de f dans les bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$.
2. On pose $u = (5, -2) \in \mathbf{R}^2$. Déterminer $f(u)$ de deux manières.

3 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

DÉFINITION

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
On appelle **application linéaire canoniquement associée à A** l'application $f_A \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ définie par :

$$f_A : \begin{cases} \mathbf{K}^p \rightarrow \mathbf{K}^n \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto (y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

C'est l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{K}^p$ et $\mathbf{K}^n$ est A .

Exercice 9 : exprimer l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Le rang d'une matrice correspond au rang de l'application linéaire qui lui est associée.

4 Opérations sur les matrices

a Somme, produit par un scalaire

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E et F , soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors :

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)$
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$

b Composée d'applications linéaires

Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases de E, F, G .

Alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$

En particulier, si f est un endomorphisme de E et si $k \in \mathbf{N}$, alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^k$.
où f^k désigne la composée $k^{\text{ième}}$ de f par elle-même.

A retenir : Une composée d'applications linéaires correspond à un produit matriciel.

Exemple : Soit $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On pose $g = f \circ f \circ f - 2.f \circ f + 3.\text{Id}_E$

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = A^3 - 2A^2 + 3I_n$, où n désigne la dimension de E .

c Réciproque d'un isomorphisme

THÉORÈME

Soient E, F des $\mathbf{K}$ -ev de dimensions finies et de bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ est inversible.

Dans ce cas, $\dim E = \dim F$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f))^{-1}$

preuve :

Exercice 10 : Soit $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (3x - y, -5x + 2y) \end{cases}$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.
2. Expliquer pourquoi A est inversible, et déterminer A^{-1} .
3. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. En déduire l'expression de $f^{-1}(x, y)$.

5 Noyau, image d'une matrice

DÉFINITION

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice de taille $n \times p$. On définit :
 $\text{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \mid MX = 0\}$ l'ensemble des matrice-colonnes X telles que $MX = 0$.
 $\text{Im}(M) = \{MX, X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})\}$ l'ensemble des matrice-colonnes de la forme MX .

6 Formules de changement de base

PROPOSITION

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . Alors $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$.

PROPOSITION ** Changement de bases pour un vecteur **

Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie n muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Soit $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Soit $u \in E$, $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors : $X = PX'$.

THÉORÈME ** Changement de bases pour une application linéaire **

Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Soit F un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On note $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$. Alors : $A' = Q^{-1}AP$.

COROLLAIRE ** Changement de bases pour un endomorphisme **

Soit E un $\mathbf{K}$ -ev de dimension finie muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Alors : $A' = P^{-1}AP$.

preuve :

Remarque : on reconnaît la définition de deux matrices semblables.

Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Exercice 11 : Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. On considère $\mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 2))$.

1. Donner l'expression de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ canoniquement associée à la matrice A .
2. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbf{R}^2$, écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer P^{-1} .
4. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.

V Réduction des endomorphismes

1 Éléments propres d'un endomorphisme

DÉFINITION

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -ev E (de dimension quelconque).
 Un **vecteur propre** de f est un vecteur $u \in E$, non nul, tel que : $f(u) = \lambda u$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{K}$.
 Une **valeur propre** de f est un scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que : $\exists u \in E, u \neq 0, f(u) = \lambda u$.
 Le **spectre** de f est l'ensemble de ses valeurs propres. On le note : $\text{Sp}(f)$.
 Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, l'**espace propre** associé à λ est l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = \lambda u$.

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(f), E_\lambda(f) = \{u \in E \mid f(u) = \lambda u\} = \text{Ker}(f - \lambda I_E)$$

PROPOSITION

| Pour toute valeur propre λ de f , l'espace propre $E_\lambda(f)$ est un s-ev de E , et $\dim(E_\lambda(f)) \geq 1$.

Exercice 12 : • Soit d la dérivation de $\mathbf{K}[X] : \forall P \in \mathbf{K}[X], d(P) = P'$. Déterminer le spectre de d .
 • Soit $\frac{d}{dx}$ la dérivation de $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$. Déterminer $\text{Sp}(\frac{d}{dx})$ et étudier les espaces propres.

PROPOSITION

| Soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs propres de f , associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux-à-deux distinctes. Alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre.

preuve :

COROLLAIRE

| Si E est de dimension finie n , et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f admet au plus n valeurs propres.
 De plus, une juxtaposition de bases des sous espaces propres de f est une famille libre.
 En conséquence,
$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n.$$

2 Diagonalisation d'un endomorphisme

DÉFINITION

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de E constituée de vecteurs propres de f .

PROPOSITION

| Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.
 Alors f est diagonalisable si et seulement si sa matrice relativement à n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E est diagonalisable, si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.

THÉORÈME ** Diagonalisabilité d'un endomorphisme **

| Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie n .
 • f est diagonalisable si et seulement si :
$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n.$$

 • Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable, et chaque espace propre est de dimension 1.

Exercice 13 : Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$ et f l'application définie par : $\forall P \in E, f(P) = (X^2 - 1)P'' - (3X + 1)P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les éléments propres de f .
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?