Corrigé du DM 8

1. (a)
   * f est positive car pour tout $x \geqslant e,\ \ln(x) \geqslant 1 > 0$.
   * f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en e, car sur $]-\infty, e[$ elle est nulle et sur $[e+\infty[$ elle est l'inverse d'un produit de composées de fonctions continues.
   * $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2(x)}\mathrm{d}x$.

   Soit $t \in [e, +\infty[$.
   $$\int_e^t \frac{1}{x\ln^2(x)}\mathrm{d}x = \int_e^t \frac{1/x}{(\ln(x))^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_e^t = -\frac{1}{\ln(t)} + 1 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.
   $$\boxed{\text{Donc } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

   (b) Soit X une variable aléatoire de densité f. $\mathrm{P}(X < e) = \displaystyle\int_{-\infty}^{e} f(x)\mathrm{d}x = 0$, donc $X(\Omega) \subset [e, +\infty[$.
   * $\forall\, x < e,\ F_X(x) = 0$.
   * Soit $x \in [e, +\infty[$.
   $$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_e^x \frac{1}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{\ln(x)}$$
   $$\boxed{\text{Donc : } F_X(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\ln(x)} & \text{si } x \geqslant e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

   (c) La variable aléatoire X admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\,\mathrm{d}x = \int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{d}x.$$
   On sait que : $\forall\, x \geqslant e,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x\ln(x)} \leqslant \dfrac{1}{\ln^2(x)}$ car $\ln(x) \geqslant x$ et $\ln(x) > 0$.
   Or, pour $t \in [e, +\infty[$,
   $$\int_e^t \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x = [\ln(|\ln(x)|)]_e^t = \ln(\ln(t)) - \ln(\ln(e)) = \ln(\ln(t)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$
   donc $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\mathrm{d}x$ est divergente.
   D'après le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln^2(x)}\mathrm{d}x$ est divergente, et donc X n'admet pas d'espérance.
   On en déduit que X n'admet pas non plus de moment d'ordre 2, donc X n'admet pas de variance.
   $$\boxed{X \text{ n'admet ni d'espérance, ni de variance.}}$$

2. (a) Soit U un variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $T = \exp(\frac{1}{1-U})$. La fonction proposée permet de simuler la variable aléatoire T. Montrons que T suit la même loi que X.
   * $[0 \leqslant U < 1] = [0 < 1 - U \leqslant 1] = \left[\dfrac{1}{1-U} \geqslant 1\right] = \left[\exp\left(\frac{1}{1-U}\right) \geqslant e\right]$. Donc $T(\Omega) \subset [e, +\infty[$.
   * $\forall\, x < e,\ F_T(x) = 0$.

* Soit $x \geqslant e$.

$$\begin{aligned}
F_T(x) = \mathrm{P}(T \leqslant x) &= \mathrm{P}\left(\exp(\tfrac{1}{1-U}) \leqslant x\right) \\
&= \mathrm{P}\left(\frac{1}{1-U} \leqslant \ln(x)\right) \quad \text{car } \ln \text{ est strictement croissante sur } [e,+\infty[\\
&= \mathrm{P}\left(1-U \geqslant \frac{1}{\ln(x)}\right) \quad \text{car } \ln(x) > 0 \\
&= \mathrm{P}\left(U \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) \\
&= F_U\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right) = 1 - \frac{1}{\ln(x)} \quad \text{car } 1 - \frac{1}{\ln(x)} \in [0,1] \text{ pour } x \geqslant e
\end{aligned}$$

On constate que X et T ont la même fonction de répartition, donc X et T suivent la même loi.

$\boxed{\text{La fonction } \texttt{X()} \text{ permet bien de simuler la variable aléatoire } X.}$

(b)

```python
import random as rd

def X():
    return exp(1/(1-rd.random()))

def liste(n):
    return [X() for _ in range(n)]
```

3. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et de même loi que X.
Pour $x \in \mathbb{R}$, les événements $((X_i < x))_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont donc mutuellement indépendants de même probabilité $\mathrm{P}(X_i < x) = F_X(x) = 1 - \dfrac{1}{\ln(x)} \in]0,1[$ car $x > e$.
Comme U_x compte le nombre de fois que pour $i \in [\![1,n]\!]$ l'événement $(X_i < x)$ est réalisé,

$$\boxed{U_x \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, 1 - \tfrac{1}{\ln(x)}\right).}$$

4. (a) On écrit une fonction `tri(L)` qui prend en argument une liste L et la trie selon le principe du tri à bulles. On simule alors la variable Y_n en renvoyant le second élément de la liste fournie par la fonction `liste(n)` préalablement triée.

```python
def tri(L):
    for _ in range(n-1):
        for i in range(n-1):
            if L[i]>L[i+1]:
                L[i], L[i+1] = L[i+1], L[i]

def Y(n):
    L = liste(n)
    tri(L)
    return L[1]
```

(b) On sait que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) \subset [e,+\infty]$. Donc $Y_n(\Omega) \subset [e,+\infty[$.

* $\forall\, x < e$, $G_n(x) = 0$.
* Soit $x \geqslant e$.

$$\begin{aligned}
G_n(x) = \mathrm{P}(Y_n \leqslant x) = \mathrm{P}(U_x \geqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(U_x \leqslant 1) &= 1 - \mathrm{P}(U_x = 0) - \mathrm{P}(U_x = 1) \\
&= 1 - \frac{1}{\ln^n(x)} - n\left(1 - \frac{1}{\ln(x)}\right)\frac{1}{\ln^{n-1}(x)} \\
&= 1 + \frac{(n-1)}{\ln^n(x)} - \frac{n}{\ln^{n-1}(x)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc : } G_n(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(n-1)}{\ln^n(x)} - \dfrac{n}{\ln^{n-1}(x)} & \text{si } x \geqslant e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

(c) $*$ La fonction G_n est continue sur $]-\infty, e[$ et sur $[e, \infty[$. Montrons qu'elle est continue à gauche en e :

$$\lim_{\substack{x \to e \\ <}} G_n(x) = 0 = G_n(e).$$

Donc G_n est continue sur $\mathbb{R}$.

$*$ G_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en e.

Donc Y_n est une variable aléatoire à densité et on obtient une densité g_n en dérivant G_n là où elle est dérivable et en choisissant une valeur arbitraire sinon.

$$\boxed{g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{x \ln^n(x)} \left(1 - \dfrac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } x \geqslant e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.}$$

(d) Dans cette question, on suppose que $n \geqslant 3$. On note $Z_n = \ln(Y_n)$. D'après le théorème de transfert, Z_n admet une espérance si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(x) g_n(x) \mathrm{d}x$ est absolument convergente.

$$\int_0^{+\infty} |\ln(x) g_n(x)| \mathrm{d}x = \int_e^{+\infty} \frac{n(n-1)}{x \ln^{n-1}(x)} - \frac{n(n-1)}{x \ln^n(x)} \mathrm{d}x$$

Soit $t \in [e, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_e^t \frac{n(n-1)}{x \ln^{n-1}(x)} - \frac{n(n-1)}{x \ln^n(x)} \mathrm{d}x &= \left[-\frac{n(n-1)}{(n-2)\ln^{n-2}(x)} + \frac{n}{\ln^{n-1}(x)} \right]_e^t \quad (n-1 \neq 1 \text{ et } n \neq 1) \\ &= -\frac{n(n-1)}{(n-2)\ln^{n-2}(t)} + \frac{n}{\ln^{n-1}(t)} + \frac{n(n-1)}{(n-2)} - n \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{n(n-1)}{(n-2)} - n \end{aligned}$$

Donc Z_n admet une espérance et

$$\mathrm{E}(Z_n) = \int_0^{+\infty} \ln(x) g_n(x) \mathrm{d}x = \frac{n(n-1)}{(n-2)} - n = \frac{n}{n-2}.$$

$$\boxed{\text{Donc } Z_n \text{ admet une espérance et } \mathrm{E}(Z_n) = \frac{n}{n-2}.}$$