I Généralités

1 Introduction

Dans ce chapitre, on développe des outils pour comprendre et manipuler des variables aléatoires réelles (VAR) dont l'ensemble des valeurs prises (univers-image) est un intervalle réel, ou une union d'intervalles réels. Par exemple, si on jette une fléchette sur une cible circulaire de centre O et de rayon r, on peut modéliser la distance entre la fléchette et le centre de la cible (exprimée par exemple en centimètres) comme une VAR X telle que $X(\Omega) = [0, r]$ (on suppose que toutes les flèchettes se plantent dans la cible). Si les fléchettes tombent "n'importe où" sur la cible (distribution *uniforme*), on veut modéliser X de sorte que la probabilité que la fléchette se plante dans une partie de la cible est proportionnelle à l'aire de cette partie. Mais alors pour tout $x \in X(\Omega)$, on aura $\mathbf{P}(X = x) = 0$ car la partie de la cible constituée des points situés à une distance x du centre est le cercle de centre O et de rayon x, qui est d'aire nulle...

Pour $0 \leqslant a < b \leqslant r$, on peut en revanche modéliser la probabilité que l'événement $[a \leqslant X \leqslant b]$ est réalisé par le rapport entre l'aire de la couronne délimitée par les rayons a et b, et l'aire de la cible tout entière :

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \frac{\pi b^2 - \pi a^2}{\pi r^2} = \frac{b^2 - a^2}{r^2}$$

Si b est très proche de a, on pourra écrire $b = a + h$ avec $h \to 0$, et alors :

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant a+h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{r^2} = \frac{2ah + h^2}{r^2} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{2ah}{r^2} = h \times f(a) \quad \text{avec } f(a) = \frac{2a}{r^2}.$$

Cette fonction f suffit pour calculer $\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b)$ pour tous $a, b \in [0, r]$ $(a \leqslant b)$:

$$\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{2t}{r^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r^2}\left[t^2\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{r^2}$$

Dans la suite, on appelera cette fonction une **densité** de la VAR X.

2 Densité de probabilité

Définition

Une fonction réelle f est une **densité de probabilité** si et seulement si :

- $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) \geqslant 0.$
- $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f$ converge et vaut 1.

Remarque : l'existence de $\displaystyle\int f$ impose une certaine régularité pour la fonction f.

Dans le cadre de notre programme, on considèrera des fonctions f qui sont **continues sur R sauf éventuellement en un nombre fini de points.**

Exemple : la fonction f de l'exemple précédent est définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \quad \text{ou} \quad t > r \\ \frac{2t}{r^2} & \text{si } t \in [0, r] \end{cases}$

Elle est donc positive sur $\mathbf{R}$, continue sur $\mathbf{R}$ sauf en $t = r$, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_0^r \frac{2t}{r^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{r^2} \times \frac{r^2}{2} = 1.$

Puisque f est nulle en dehors de l'intervalle $[0, r]$, on dira que f est **de support** $[0, r]$.

Ce support étant un segment, $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f$ n'est en fait pas une intégrale généralisée.

Exercice 1 : Montrer que la fonction g définie par $g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

Exercice 2 : Soit $a \in \mathbf{R}$, et soit h la fonction définie par : $\forall t \in \mathbf{R},\ h(t) = \dfrac{a}{1+t^2}$.

À quelle condition h est-elle une densité de probabilité ?

3 VAR à densité

Définition

Soit X une VAR définie sur un univers Ω. On dit que X **est à densité** (ou *possède* une densité) s'il existe une densité de probabilité f telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans ce cas, on dit que f **est une densité (de probabilité) de** X.

Remarque : si X est une VAR à densité, alors elle admet une infinité de densités de probabilité. Conformément à notre programme, on n'aura à envisager que les cas où deux densités d'une même VAR X sont égales sauf éventuellement en un nombre fini de points.

PROPOSITION

Soit X une VAR de densité f. Alors pour tous réels $a \leqslant b$:

- $\mathbf{P}(X = a) = 0$
- $\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a \leqslant X < b) = \mathbf{P}(a < X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\mathbf{P}(X \leqslant b) = \mathbf{P}(X < b) = \displaystyle\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\mathbf{P}(X \geqslant a) = \mathbf{P}(X > a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$

Attention ! $a \leqslant b$ est crucial ici : si $a > b$, alors $\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = 0$ alors que $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.

THÉORÈME $***$ **Existence de VAR à densité** (*admis*) $***$

Soit f une densité de probabilité. Alors il existe une VAR X à densité, dont f est une densité de probabilité.

4 Fonction de répartition d'une VAR à densité

DÉFINITION

Soit X une VAR à densité, de densité f. Alors la **fonction de répartition** F_X de X est définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exerice 3 : Déterminer la fonction de répartition F_X de la VAR X de densité : $f_X(t) = e^{-t}\,\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+}(t)$. Représenter graphiquement f_X et F_X sur $\mathbf{R}$.

PROPRIÉTÉ **Expression des probabilités à l'aide de la fonction de répartition** :

Soit X une VAR à densité, de fonction de répartition F_X. Soient $a < b$ des réels. Alors :

- $\mathbf{P}(X \leqslant b) = \mathbf{P}(X < b) = F_X(b)$
- $\mathbf{P}(X \geqslant a) = \mathbf{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$
- $\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a \leqslant X < b) = \mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$

PROPOSITION

Soit F_X la fonction de répartition d'une VAR à densité X. Alors :

- F_X est croissante sur $\mathbf{R}$.
- F_X est continue sur $\mathbf{R}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
- F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
- la fonction f_X définie par $f_X(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } F_X \text{ est dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

  est une densité de probabilité de X.

preuve :

THÉORÈME $***$ **Caractérisation d'une VAR à densité** (*admis*) $***$

Soit X une VAR de fonction de répartition F_X.
Alors X est à densité si et seulement si F_X est continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exerice 4 : Soit X une VAR aléatoire telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ \mathbf{P}(X \leqslant x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Montrer que X est une VAR à densité, et déterminer une densité de X.

5 Fonction quantile

On suppose que X est une VAR à densité, de densité f_X non nulle sur un intervalle I, et nulle sur $\mathbf{R} \setminus I$. On a donc $X(\Omega) = I$, et, en notant a, b les bornes de I, la fonction de répartition F_X de X réalise une bijection de $]a, b[$ vers $]0, 1[$.

Définition

La fonction $Q_X :]0, 1[\longrightarrow]a, b[$, bijection réciproque de $F_X|_{]a,b[}$ est appelée **fonction quantile** de X.

$$\forall x \in]a, b[,\ \forall u \in]0, 1[, \text{ on a : } F_X(x) = u \Leftrightarrow x = Q_X(u)$$

Si a, b sont réels (c'est-à-dire $a \neq -\infty$, $b \neq +\infty$), on pose de plus : $Q_X(0) = a$ et/ou $Q_X(1) = b$.

La fonction quantile permet d'estimer les valeurs en-dessous desquelles, ou au-dessus desquelles on observe un certain pourcentage de réalisations de X.
Par exemple, si $Q_X(0,1) = \alpha$, alors $\mathbf{P}(X \leqslant \alpha) = 10\%$ et α est appelé le premier décile de X.
si $Q_X(0,5) = \beta$, alors $\mathbf{P}(X \leqslant \beta) = 50\%$ et β est appelé la médiane de X.
si $Q_X(0,75) = \gamma$, alors $\mathbf{P}(X \geqslant \gamma) = 25\%$ et γ est appelé le troisième quartile de X.

6 Cas où la densité est paire

Proposition

Soit X une VAR de densité f_X, et de fonction de répartition F_X.
Si f_X est une fonction paire, alors : $\forall x \in \mathbf{R},\ F_X(-x) = 1 - F_X(x)$.
De plus, $F_X(0) = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbf{P}(0 \leqslant X \leqslant x) = \mathbf{P}(-x \leqslant X \leqslant 0) = F_X(x) - \dfrac{1}{2}$.

schéma et preuve :

Exemple : Soit X une VAR de densité : $f_X(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

Alors la fonction de répartition de X est : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} = \frac{1}{\pi}\left(\mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right)$

On a bien : $F_X(-x) = \dfrac{1}{\pi}\left(\mathrm{Arctan}(-x) + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - F_X(x)$ car Atan est impaire.

II Fonctions d'une VAR à densité

1 Cas général

Soit X une VAR à densité. Soit g une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$.
On pose $Y = g(X)$. On admet que Y est encore une VAR. Conformément au programme, deux cas sont à envisager : Y est une VAR discrète, ou Y est une VAR à densité.

1. on étudie l'univers-image $Y(\Omega)$ pour connaître le type de la VAR Y.
2. Si $Y(\Omega)$ est fini, ou infini dénombrable, alors Y est discrète, et on détermine $\mathbf{P}(Y = y_k)$ pour tout $y_k \in Y(\Omega)$.
3. sinon, on détermine la fonction de répartition $F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x)$. On vérifie que F_Y est continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. On peut alors affirmer que Y est une VAR à densité, et on détermine une densité de Y en calculant $f_Y(t) = F'_Y(t)$ lorsque F_Y est dérivable en t, et en posant $f_Y(t) = 0$ sinon.

Dans ces 3 exercices, X est une VAR à densité, de densité $f_X(t) = 1$ si $t \in [0, 1]$, et $f_X(t) = 0$ sinon.

Exercice 5 : On pose : $Y_1 = \lfloor 3X \rfloor$. Étudier la VAR Y_1.

Exercice 6 : On pose : $Y_2 = X^2$. Étudier la VAR Y_2.

Exercice 7 : On pose : $Y_3 = X$ si $X \leqslant \frac{1}{2}$ et $Y_3 = 1$ sinon. Étudier la VAR Y_3.

2 Cas où g est une fonction affine

Soit X une VAR de densité f_X. On pose : $g(x) = ax + b$, avec a, b réels fixés, $a \neq 0$, et $Y = g(X)$.

Alors Y est une VAR à densité, de densité $f_Y(x) = \dfrac{1}{|a|} f_X\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.

preuve :

3 Cas où g est une puissance entière

Soit X une VAR de densité f_X. On pose : $g(x) = x^r$, avec $r \in \mathbf{N}^\star$, et $Y = g(X)$.
Alors Y est une VAR à densité, de densité :

1^er^ cas : si r est impair, $f_Y(x) = \dfrac{1}{r} x^{\frac{1}{r}-1} f_X\left(x^{\frac{1}{r}}\right)$ si $x \neq 0$, et 0 sinon.

2^me^ cas : si r est pair, $f_Y(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f_Y(x) = \dfrac{1}{r} x^{\frac{1}{r}-1} \left(f_X(x^{\frac{1}{r}}) + f_X(-x^{\frac{1}{r}})\right)$ sinon.

preuve :

III Moments d'une VAR à densité

1 Définition

Définition

> Soit X une VAR à densité, de densité f_X, et soit $r \in \mathbf{N}$.
> Alors X admet un moment d'ordre r si et seulement si $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} t^r\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument** convergente.
> Dans ce cas, le **moment d'ordre r de X** est : $m_r(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 8 : On pose $f(t) = \dfrac{2}{t^3}$ si $t \geqslant 1$, et $f(t) = 0$ si $t < 1$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une VAR à densité, de densité f.
   Étudier l'existence des moments d'ordre $r \in \mathbf{N}$ de X, et les calculer le cas échéant.

Proposition

> Soit X une VAR à densité, admettant un moment d'odre $r \in \mathbf{N}$.
> Alors pour tout $s \in [\![0, r]\!]$, X admet un moment d'ordre s.

preuve :

2 Espérance

Définition

> **L'espérance (moyenne)** d'une VAR à densité est, s'il existe, son moment d'ordre 1 :
> X possède une espérance ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |t| f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et dans ce cas :
> $$\mathbf{E}(X) = m_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 : soit f définie par $f(t) = 6t(1-t)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.
Montrer que f est la densité d'une VAR X, admettant une espérance. Calculer cette espérance.

Propriété $\ast\ast\ast$ **Croissance et linéarité de l'espérance** $\ast\ast\ast$

> • Si X, Y sont 2 VAR à densité admettant une espérance, et si $X \leqslant Y$, alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.
>
> • en particulier, si X est une VAR à densité, positive, admettant une espérance, alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.
>
> • si X, Y sont 2 VAR à densité admettant une espérance, alors $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $aX + bY$ admet une espérance et : $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$
>
> • en particulier, si X admet une espérance, alors : $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$.

(*résultats admis*)

Définition

> Soit X une VAR à densité admettant une espérance.
> $\ast$ si $\mathbf{E}(X) = 0$, alors X est dite **centrée**.
> $\ast$ $Y = X - \mathbf{E}(X)$ est centrée. On l'appelle la **VAR centrée associée à** X.

3 Théorème de transfert

Théorème (*admis*)

Soit X une VAR à densité, de densité f_X, et soit g une fonction réelle.
On pose $Y = g(X)$ et on suppose que Y est une VAR à densité.
Alors Y admet une espérance si et seulement si $\int_{\mathbf{R}} g(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
Dans ce cas, $\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 10 : Soit X une VAR de densité : $\forall t \in \mathbf{R},\ f_X(t) = \dfrac{1}{\pi(t^2+1)}$. On pose $Y = \sin(X)$.
On admet que Y est une VAR. Monter que Y admet une espérance, et que $\mathbf{E}(Y) = 0$.

4 Variance et écart-type

Définition

Soit X une VAR à densité possédant une espérance μ. Alors X possède une **variance** si et seulement si $X - \mu$ possède un moment d'ordre 2.
Dans ce cas : $\mathbf{V}(X) = m_2(X-\mu) = \mathbf{E}\big((X-\mu)^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$

Propriété

Si X admet une variance, alors $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$, et $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si X suit une loi quasi-certaine (et donc dans ce cas X est une VAR discrète).

preuve :

Définition

Si X admet une variance, on définit l'**écart-type** de X par : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Théorème $***$ **de König-Huygens** $***$

Soit X une VAR à densité. Alors X admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2.
Dans ce cas : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \big(\mathbf{E}(X)\big)^2$.

preuve :

Propriété

Si X admet une variance, alors : $\forall a, b \in \mathbf{R},\ (aX+b)$ admet une variance et
$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$, donc $\sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X)$.

preuve :

Définition

Soit X une VAR à densité possédant une variance (donc une moyenne μ et un écart-type $\sigma > 0$).
$*$ si $\sigma = 1$, alors X est dite **réduite**.
$*$ $X^\star = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ est centrée et réduite. C'est la **VAR centrée réduite associée à** X.

Propriété

Soit X une VAR possédant une espérance μ et un écart-type $\sigma > 0$.
Alors : $\forall x \in \mathbf{R},\ \mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right) = \mathbf{P}\left(X^\star \leqslant \dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

IV Lois usuelles

1 Loi uniforme sur un segment $[a, b]$

Définition

Soients $a < b$ des réels. Une VAR X suit une **loi uniforme sur** $[a, b]$ si et seulement si :

$$\forall c < d \in [a,b],\ \mathbf{P}(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Dans ce cas :

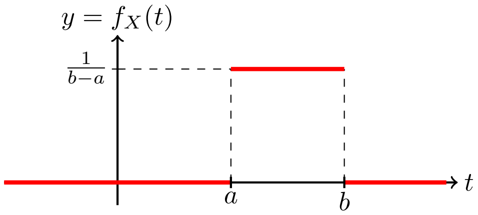
$*$ une densité f_X de X est : $f_X = \dfrac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}$.

$*$ la fonction de répartition F_X de X a pour expression : $\forall x \in \mathbf{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

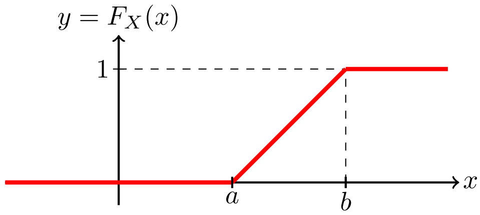
$*$ on note : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$.

C'est la loi qu'on utilise pour modéliser le choix "au hasard" d'un réel entre a et b.

Densité d'une VAR uniforme :



Fonction de répartition :



Simulation informatique :
La fonction `rd.random()` du module `random` permet de simuler une loi uniforme sur $[0, 1]$.
La fonction `(b-a)*rd.random() + a` permet de simuler une loi uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 11 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a, b]\big)$, et soit $r \in \mathbf{N}$.
Montrer que X admet un moment d'ordre r, égal à : $m_r(X) = \dfrac{1}{r+1} \times \dfrac{b^{r+1} - a^{r+1}}{b-a}$.

Propriété
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$. Alors X admet une espérance et une variance, et on a :

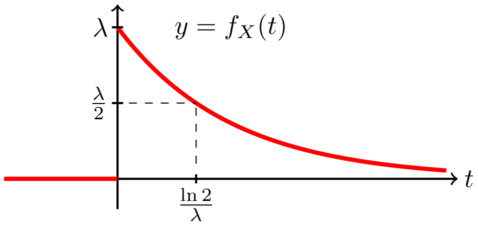
$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2 Loi exponentielle

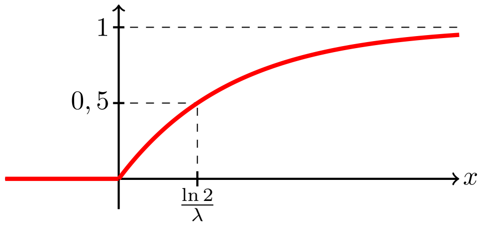
Définition

Soit $\lambda > 0$. Une VAR X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ si et et seulement une densité de X est : $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}\, \mathbb{1}_{\mathbf{R}_+}(t)$. On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
Dans ce cas, la fonction de répartition F_X de X est : $F_X(x) = \big(1 - e^{-\lambda x}\big)\mathbb{1}_{\mathbf{R}_+}(x)$.

Densité d'une loi exponentielle :



Fonction de répartition : $y = F_X(x)$



Exercice 12 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, et soit $r \in \mathbf{N}$.
Montrer que X admet un moment d'ordre r, égal à : $m_r(X) = \dfrac{r!}{\lambda^r}$.

Propriété
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors :
- X possède une espérance, et $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.
- X possède une variance, et $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exemples : la durée de vie d'une particule radioactive suit une loi exponentielle de paramètre λ, appelé dans ce cas la constante de désintégration. La médiane $\dfrac{\ln(2)}{\lambda}$ est la demi-vie (ou période radioactive).
Les lois exponentielles permettent aussi de modéliser les durées de vie de composants électroniques, ou des temps d'attente (d'un appel téléphonique, d'un client dans un magasin...).

Simulation informatique :
La fonction `-log(rd.random())/ℓ` permet de simuler une loi exponentielle de paramètre $\ell > 0$.
preuve :

Propriété $\ast\ast\ast$ **Invariance temporelle** $\ast\ast\ast$
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Alors : $\forall s, t \geqslant 0,\ \mathbf{P}_{[X \geqslant s]}(X \geqslant s + t) = \mathbf{P}(X \geqslant t)$.
preuve :

3 Loi normale centrée réduite (loi normale standard)

Définition

Une VAR X suit la **loi normale centrée réduite** si et et seulement une densité de X est :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad \text{On note alors : } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

La loi normale centrée réduite est très utilisée en probabilités. Elle permet de modéliser de nombreux phénomènes. On verra dans un chapitre futur qu'elle donne une bonne approximation (sous certaines hypothèses) de toute somme de VAR indépendantes et de même loi.

Exercice 13 : Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, et soit $r \in \mathbf{N}$.
Montrer que X admet un moment d'ordre r, et que :

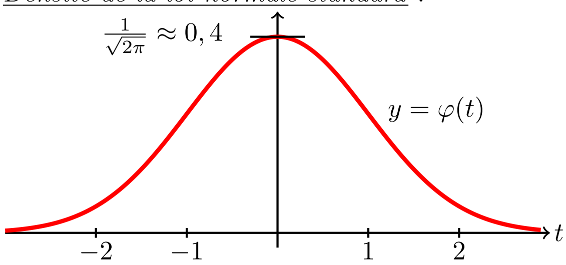
- si r est pair ($r = 2s$), alors $m_r(X) = \dfrac{r!}{2^s s!}$
- si r est impair, alors $m_r(X) = 0$.

Propriété

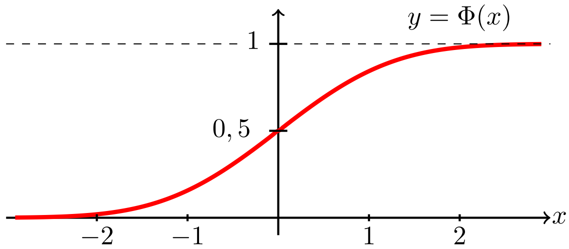
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors :

- La fonction de répartition X est notée : $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.
- X possède une espérance, et $\mathbf{E}(X) = 0$.
- X possède une variance, et $\mathbf{V}(X) = 1$.

Densité de la loi normale standard :



Fonction de répartition :



La fonction Φ n'a pas d'expression utilisant les fonctions usuelles. On peut montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)2^n\, n!} \qquad \text{cette série étant convergente pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Le calcul des sommes partielles de cette série donne alors des valeurs approchées de $\Phi(x)$.
En pratique, on utilise des tables de valeurs de Φ, ou des moyens informatiques :

```
from scipy.stats import norm
norm.pdf(x)             # renvoie φ(x)
norm.cdf(x)             # renvoie Φ(x)
norm.ppf(x)             # renvoie Φ^{-1}(x)
```

4 Lois normales (lois de Laplace-Gauss, ou distributions gaussiennes)

Définition

Soient μ, σ des réels avec $\sigma > 0$. Une VAR X suit la **loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ** si et et seulement une densité de X est : $f_X(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \dfrac{1}{\sigma} \times \varphi\left(\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right)$.
On note alors : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, et on dit que X est une VAR *gaussienne*.

Propriété

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors :

- La fonction de répartition F_X vaut : $F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,\mathrm{d}t$.
- $X^\star \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- X possède espérance et variance, et $\mathbf{E}(X) = \mu$, $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$.
- $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, la VAR $aX + b$ suit une loi normale.
  En particulier, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors $aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(b, a^2)$.

preuve :

Simulation informatique :
La fonction `rd.gauss(m,s)` permet de simuler une loi normale de moyenne $\mu = m$ et d'écart-type $\sigma = s$.

Exercice 14 : • Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(4,4)$. Donner une valeur approchée de $\mathbf{P}(X \leqslant 6)$.
• Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(3,2)$. Donner une valeur approchée du réel x tel que $\mathbf{P}(X \leqslant x) = 50\%$.
• Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(5,4)$. Donner une valeur approchée de $\mathbf{P}(2 < X < 8)$.
• Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1,4)$. Estimer $a \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P}(1-a < X \leqslant 1+a) = 0,9$.

V Somme de VAR à densité indépendantes

1 Indépendance

DÉFINITION ∗∗ **Indépendance 2 à 2** ∗∗

Soient X, Y deux VAR à densité définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.
X et Y sont dites **indépendantes** ssi : $\forall (I \times J) \in \mathcal{T}^2,\ \mathbf{P}\big([X \in I] \cap [Y \in J]\big) = \mathbf{P}(X \in I) \times \mathbf{P}(Y \in J)$.

On a dans ce cas : $\mathbf{P}_{[Y \in J]}(X \in I) = \mathbf{P}(X \in I)$, ce qui correspond bien à l'idée courante d'indépendance.

DÉFINITION ∗∗ **Indépendance mutuelle** ∗∗

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des VAR à densité définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$.
$X_1, \ldots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** ssi :

$$\forall (I_1 \times \ldots \times I_n) \in \mathcal{T}^n,\ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \in I_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \in I_k).$$

PROPOSITION

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de VAR mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille l'est aussi.

THÉORÈME ∗∗∗ **Lemme des coalitions** ∗∗∗

Soit $(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_p)$ une famille de VAR mutuellement indépendantes.
- Soient $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^{p-n} \longrightarrow \mathbf{R}$.
  Alors, les VAR $f(X_1, \ldots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \ldots, X_p)$ sont indépendantes.
- Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
  Alors, les VAR $f_1(X_1), \ldots, f_p(X_p)$ sont mutuellement indépendantes.

Exercice 15 : Soient X, Y deux VAR indépendantes telles que : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$.
On pose $Z = \min(X, Y)$. Montrer que : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda + \mu)$.

2 Produit de convolution

DÉFINITION

Soient f et g deux densités de probabilités. Alors le **produit de convolution** de f et g, noté $f \star g$, est la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f \star g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t$

Remarque : la formule du produit de convolution est toujours rappelée dans les énoncés.

PROPRIÉTÉ

Le produit de convolution est commutatif : $f \star g = g \star f$

3 Densité d'une somme de VAR indépendantes

PROPOSITION

Soient X, Y des VAR à densité, **indépendantes**, de densités respectives f et g.
Alors $Z = X + Y$ est une VAR à densité, et une densité de Z est $f \star g$.

Exercice 16 : Soient $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0,1]\big)$, indépendantes. Déterminer une densité de $Z = X + Y$.

Exercice 17 : Soient $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, indépendantes. Déterminer une densité de $Z = X + Y$.

4 Somme de VAR gaussiennes indépendantes

PROPRIÉTÉ

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des VAR mutuellement indépendantes telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{N}\big(\mu_k, \sigma_k^2\big)$$

Alors $Z = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ vérifie : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2\right)$.

preuve :