Exercice 2 : Montrer qu'une fonction F est la fonction de répartition d'une VAR à densité
Cette question n'est plus au programme !
Ce qu'il faut savoir faire :
Soit F la fonction de répartition d'une VAR X. Montrer que X admet une densité.
On utilise pour cela la caractérisation :

1. F est continue sur $\mathbf{R}$ (sans exception !)
2. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Ce qu'on vérifie facilement avec la fonction F proposée :
$F : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est continue sur $\mathbf{R}$ par opérations, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ par opérations.
On trouve alors une densité de X en dérivant F quand c'est possible, en en posant $f(x) = 0$ sinon (ou toute autre valeur).
$\forall x \in \mathbf{R},\ F'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ donc une densité de X est : $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Exercice 3 : Racine carrée d'une loi exponentielle

1. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$.
   * $X(\Omega) = \mathbf{R}_+$ donc $\boxed{Y(\Omega) = \mathbf{R}_+ \text{ et } Y \text{ n'est pas une VAR discrète.}}$
   * Fonction de répartition de Y : soit $x \in \mathbf{R}$.

   Si $x < 0$, alors $F_Y(x) = 0$.
   Si $x \geqslant 0$, alors $F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(\sqrt{X} \leqslant x) = \mathbf{P}(X \leqslant x^2) = F_X(x^2)$.
   On a donc : $F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x^2}$. Conclusion : $\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$
   Par opérations, $F_Y \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^\star)$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$ donc F_Y est continue en 0.
   Ainsi, F_Y est continue sur $\mathbf{R}$. Enfin, par opérations, F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0.
   Conclusion : $\boxed{Y \text{ est une VAR à densité.}}$
   Si $x < 0$, $F_Y'(x) = 0$ et si $x > 0$, $F_Y'(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$.
   Conclusion : $\boxed{\text{une densité de } Y \text{ est : } f_Y(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$
2. Espérance et variance de Y
   1ère méthode : on se sert de la densité trouvée précedemment.
   Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x f_Y(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.
   Le support de f_Y étant $\mathbf{R}_+$, on étudie : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} x \times 2\lambda x e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x$, généralisée en $+\infty$.
   On pose : $u(x) = -e^{-\lambda x^2}$ et $v(x) = x$. Alors $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+)$ et $u'(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$, $v'(x) = 1$.
   De plus, $\big[u(x)v(x)\big]_0^{+\infty} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} -x e^{-\lambda x^2} = 0$ par croissances comparées, et
   $$\int_0^{+\infty} uv' = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \text{ par changement de variables } t = u\sqrt{2\lambda}$$
   $$= -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \quad \text{en reconnaissant la moitié de l'intégrale de Gauss.}$$
   Donc par IPP, $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x f_Y(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, et $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}.}$

   2ème méthode : on se sert du théorème de transfert.
   Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} \sqrt{x} \times f_X(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.
   On effectue le changement de variables : $t = \sqrt{x} = \varphi(x)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^\star)$ et strictement croissante.
   On a donc : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \times \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2\lambda t^2 e^{-\lambda t^2}\,\mathrm{d}t$ et on est ramené au calcul précédent.

On étudie ensuite l'existence d'un moment d'ordre 2 pour Y, donc la convergence absolue de :
$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x^2 f_Y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 2\lambda x^3 e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} u'v$
avec $u(x) = e^{-\lambda x^2}$, $v(x) = -x^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$, et $u'(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ et $v'(x) = -2x$.
$\big[u(x)v(x)\big]_0^{+\infty} = 0$ par croissances comparées, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv' = -2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x = -2\left[\frac{e^{-\lambda x^2}}{-2\lambda}\right]_0^{+\infty}$
donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ converge et vaut $-\dfrac{1}{\lambda}$. Par IPP, $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\lambda x^3 e^{-\lambda x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$.
Y admet donc un moment d'ordre 2, donc une variance, et d'après König-Huygens,
$\mathbf{V}(Y) = m_2(Y) - m_1(Y)^2 = \dfrac{1}{\lambda} - \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2$. Conclusion : $\boxed{\mathbf{V}(Y) = \dfrac{4-\pi}{4\lambda}.}$

3. (a) cf le cours... Deux méthodes ici :
1) On résout l'équation $u = F_X(x)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, avec $u \in [0,1[$ et $x \in \mathbf{R}_+$.
On a alors : $u = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-u) \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-u)$.
Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$, alors $1 - U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$ donc $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$ renvoie une simulation de X.
2) On détermine la fonction de répartition de $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$:
$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}\left(-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U) \leqslant x\right) = \mathbf{P}(\ln(U) \geqslant -\lambda x) = \mathbf{P}(U \geqslant e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}$
On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ
donc $\boxed{X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$
(b) Simulation informatique de Y :

```
import random as rd
from math import log
def expo(mu) :
     return -log(rd.random())/mu
def Y(mu) :
    return expo(mu)**0.5
```

(c) Vérification informatique des résultats précédents :

```
def espY(mu,N) :
    s = 0
    for _ in range(N) :
        s += Y(mu)
    return s/N

def varY(mu,N) :
    L = [Y(mu) for _ in range(N)]
    m = sum(L)/N
    s = 0
    for k in range(N) :
        s += (L[k]-m)**2
    return s/N
```

Exercice 4 : $Y = e^{X+1}$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1,2)$.

1. Espérance et variance de Y.
On rappelle qu'une densité de X est : $\forall x \in \mathbf{R},\ f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, avec $\mu = 1$ et $\sigma = \sqrt{2}$.
D'après le théorème de transfert, Y admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{x+1} f_X(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument.

$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x+1} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a(x)}\,\mathrm{d}x$

avec $a(x) = x + 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}\big((x-1)^2 - 4x - 4\big) = -\dfrac{1}{4}\big(x^2 - 6x - 3\big)$

On utilise la forme canonique de ce trinôme pour faire apparaître l'intégrale de Gauss :

$a(x) = -\dfrac{1}{4}\big((x-3)^2 - 12\big) = -\dfrac{1}{4}(x-3)^2 + 3$ donc $I = \dfrac{e^3}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}(x-3)^2}\,\mathrm{d}x$.

On pose alors $t = \dfrac{x-3}{\sqrt{2}}$ trouvé en écrivant : $-\dfrac{1}{4}(x-3)^2 = -\dfrac{1}{2}t^2$.

$I = \dfrac{e^3}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{e^3}{2\sqrt{\pi}} \times \sqrt{2\pi} \times \sqrt{2} = e^3$.

Conclusion : $\boxed{Y \text{ admet une espérance, et } \mathbf{E}(Y) = e^3.}$

On peut étudier l'existence du moment d'ordre 2 de Y encore à l'aide du théorème de transfert :

$J = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \left(e^{x+1}\right)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x+2} \times \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{b(x)}\,\mathrm{d}x$

avec $b(x) = 2x + 2 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}\big(-8x - 8 + (x-1)^2\big) = -\dfrac{1}{4}\big(x^2 - 10x - 7\big)$

Même stratégie : $b(x) = -\dfrac{1}{4}\big((x-5)^2 - 32\big) = -\dfrac{1}{4}(x-5)^2 + 8$.

Donc $J = \dfrac{e^8}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4}(x-5)^2}\,\mathrm{d}x$ et on pose $t = \dfrac{x-5}{\sqrt{2}}$

$J = \dfrac{e^8}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{e^8}{2\sqrt{\pi}} \times \sqrt{2\pi}\sqrt{2} = e^8$.

Y admet donc un moment d'ordre 2, donc une variance, et d'après König-Huygens :

$\mathbf{V}(Y) = m_2(Y) - m_1(Y)^2 = e^8 - (e^3)^2$. Conclusion : $\boxed{\mathbf{V}(Y) = e^8 - e^6.}$

2. Densité de Y.

$X(\Omega) = \mathbf{R}$ donc $Y(\Omega) = \mathbf{R}_+^\star$: Y n'est pas une VAR discrère.

La fonction de répartition de Y est donnée par :

$\forall x > 0$, $F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}\left(e^{X+1} \leqslant x\right) = \mathbf{P}\big(X \leqslant \ln(x) - 1\big) = F_X\big(\ln(x) - 1\big)$

où $F_X(t) = \Phi\left(\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{t-1}{\sqrt{2}}\right)$ donc : $F_Y(x) = \Phi\left(\dfrac{\ln(x)-2}{\sqrt{2}}\right)$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On a donc : $\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{\ln(x)-2}{\sqrt{2}}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$

$\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ et $\ln \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+^\star)$ donc par opérations, $F_Y \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^\star)$.

De plus, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{\ln(x)-2}{\sqrt{2}}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \Phi(t) = 0$ donc par composées de limites,

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$ donc F_Y est continue en 0 : on a donc $F_Y \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R})$.

Ainsi, $\boxed{Y \text{ est une VAR à densité}}$, et une densité de Y est : $\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2}}\,\varphi\left(\dfrac{\ln(x)-2}{\sqrt{2}}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$

Exercice 5 : Loi Gamma

1. (a) $\forall n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ (cf exercice 4, TD 10)

I_n est généralisée en $+\infty$. Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{n+1} e^{-\frac{x}{2}} = 0$

donc $x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}} \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc : $\exists A \geqslant 0$, $\forall x \geqslant A$, $0 \leqslant x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$

On montre que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge car une primitive $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ admet une limite finie (0) en $+\infty$.

Par comparaison pour des fonctions positives, $\displaystyle\int_A^{+\infty} x^{n-1}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ I_n \text{ converge.}}$

Soit $n \geqslant 2$. Par IPP : $I_n = \left[-2x^{n-1}e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} 2(n-1)x^{n-2}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

Le crochet est nul par croissances comparées, donc : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ I_n = 2(n-1)I_{n-1}.}$

On calcule : $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-2) = 2.$

On peut appliquer la relation de récurrence pour deviner la formule générale de I_n :
$I_2 = (2\times 1)\times I_1$
$I_3 = (2\times 2)\times I_2 = (2\times 2)\times(2\times 1)\times I_1$
$I_4 = (2\times 3)\times I_3 = (2\times 3)\times(2\times 2)\times(2\times 1)\times I_1 = 2^3\times 3!\times I_1$
On pose alors : $\forall n \geqslant 1,\ \mathcal{P}(n)$: "$I_n = 2^{n-1}\times(n-1)!\times I_1$"
On prouve $\mathcal{P}(n)$ par récurrence en utilisant la relation de récurrence précédente.
Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ I_n = 2^n\times(n-1)!}$

(b) D'après son expression, f_n est positive sur $\mathbf{R}$, et continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0.
$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_n = \frac{1}{(n-1)!\,2^n}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!\,2^n}\times I_n = 1.$
Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ f_n \text{ est une densité de probabilité.}}$

2. Espérance et variance d'une VAR X_n de densité f_n.
X_n admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument,
ssi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n e^{-\frac{x}{2}}}{(n-1)!2^n}\,\mathrm{d}x$ converge, ssi $\dfrac{1}{(n-1)!\,2^n}\,I_{n+1}$ converge, ce qui est le cas.
On a donc $\mathbf{E}(X_n) = \dfrac{I_{n+1}}{(n-1)!\,2^n}$ donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \mathbf{E}(X_n) = 2n.}$
X_n admet une variance ssi $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument,
ssi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}e^{-\frac{x}{2}}}{(n-1)!\,2^n}\,\mathrm{d}x$ converge, ssi $\dfrac{1}{(n-1)!\,2^n}\,I_{n+2}$ converge, ce qui est le cas.
On a donc $m_2(X_n) = \dfrac{I_{n+2}}{(n-1)!\,2^n} = 4n(n+1)$ et d'après König-Huygens, $\mathbf{V}(X_n) = 4n(n+1) - (2n)^2$
donc $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \mathbf{V}(X_n) = 4n.}$

Exercice 8 : min et max de deux VAR à densité indépendantes

1. Cas où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$
$Z = \max(X,Y)$
On a : $\boxed{Z(\Omega) = [0,1]}$ et pour tout $x \in [0,1]$,
$\mathbf{P}(Z \leqslant x) = \mathbf{P}\left([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]\right) = \mathbf{P}\left(X \leqslant x\right) \times \mathbf{P}\left(Y \leqslant x\right)$ par indépendance
$= \left(\dfrac{x+1}{2}\right)\times x = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$. Ainsi $\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$
F_Z est continue sur $\mathbf{R}$, par opérations sur $\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ et puisque $\lim\limits_{x\to 0} F_Z(x) = 0 = F_Z(0)$
et $\lim\limits_{x\to 1} F_Z(x) = 1 = F_Z(1)$. De plus, F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0 ou en 1,
donc $\boxed{Z \text{ admet une densité.}}$ Une densité de Z est $\boxed{f_Z(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Espérance de Z : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x f_Z(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$ donc $\boxed{\mathbf{E}(Z) = \frac{7}{12}.}$

Variance de Z : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x^2 f_Z(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$ donc $m_2(Z) = \frac{5}{12}$

et d'après König-Huygens, $\mathbf{V}(Z) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2$, soit : $\boxed{\mathbf{V}(Z) = \frac{11}{144}.}$

$T = \min(X, Y)$

On a : $\boxed{T(\Omega) = [-1, 1]}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$,

$\mathbf{P}(T > x) = \mathbf{P}\left([X > x] \cap [Y > x]\right) = \mathbf{P}\left(X > x\right) \times \mathbf{P}\left(Y > x\right)$ par indépendance

$= (1 - \mathbf{P}(X \leqslant x)) \times (1 - \mathbf{P}(Y \leqslant x))$

Si $x < 0$, $\mathbf{P}(Y \leqslant x) = 0$ donc $\mathbf{P}(T > x) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant x) = 1 - \frac{x+1}{2}$.

Si $x \in [0, 1]$, alors $\mathbf{P}(T > x) = \left(1 - \frac{x+1}{2}\right) \times (1 - x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$.

Ainsi $\boxed{F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(1+x) & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$

F_T est continue sur $\mathbf{R}$, par opérations sur $\mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et puisque $\lim\limits_{x \to -1} F_T(x) = 0 = F_T(-1)$,

$\lim\limits_{x \to 0} F_T(x) = \frac{1}{2} = F_T(0)$ et $\lim\limits_{x \to 1} F_T(x) = 1 = F_T(1)$.

De plus, F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en -1, en 0 ou en 1,

donc $\boxed{T \text{ admet une densité.}}$ Une densité de T est $\boxed{f_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Espérance de T : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x f_T(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x$ donc $\boxed{\mathbf{E}(T) = -\frac{1}{12}.}$

Variance de T : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} x^2 f_T(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2(1-x)\,\mathrm{d}x$ donc $m_2(T) = \frac{1}{4}$

et d'après König-Huygens, $\mathbf{V}(T) = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{12}\right)^2$, soit : $\boxed{\mathbf{V}(T) = \frac{35}{144}.}$

2. Cas où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$
   voir **Exercice 15** du cours.

Exercice 9 : distance de deux lois exponentielles indépendantes de même paramètre

1. Densité de l'opposé d'une loi exponentielle
   $X(\Omega) = \mathbf{R}_+$ donc $-X(\Omega) = \mathbf{R}_-$
   Pour tout $x \leqslant 0$, $\mathbf{P}(-X \leqslant x) = \mathbf{P}(X \geqslant -x) = 1 - \mathbf{P}(X < -x) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant -x) = e^{\lambda x}$

   Donc $\boxed{F_{-X}(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

   F_{-X} est continue par opérations sur $\mathbf{R}^\star$, et continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0} F_{-X}(x) = 1 = F_{-X}(0)$.

   F_{-X} est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0. $\boxed{-X \text{ admet une densité.}}$

   Une densité de $-X$ est $\boxed{f_{-X}(x) = \begin{cases} \lambda e^{\lambda x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$

2. $-X$ et Y sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, $-X$ et Y admettent une densité, donc $\boxed{-X + Y \text{ est une VAR à densité.}}$

Une densité de $Y - X$ est donnée par :

$f_{Y-X}(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f_Y(x-t) f_{-X}(t)\,\mathrm{d}t$

L'intégrande est non nulle ssi : $x - t > 0$ et $t \leqslant 0$, donc ssi $t \leqslant \min(0, x)$.

Si $x > 0$, $f_{Y-X}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_Y(x-t) f_{-X}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{0} e^{2\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^2 e^{-\lambda x} \left[\frac{e^{2\lambda t}}{2\lambda}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}$$

Si $x \leqslant 0$, $f_{Y-X}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_Y(x-t) f_{-X}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{x} e^{2\lambda t}\,\mathrm{d}t = \lambda^2 e^{-\lambda x} \left[\frac{e^{2\lambda t}}{2\lambda}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f_{Y-X} = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.}$

3. $Z = |Y - X|$ suit une loi exponentielle

   $Z(\Omega) = \mathbf{R}_+$

   Soit $x \geqslant 0$. $F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leqslant x) = \mathbf{P}(|Y - X| \leqslant x) = \mathbf{P}(-x \leqslant Y - X \leqslant x)$

   $$= \int_{-x}^{x} f_{Y-X}(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \quad \text{par parité}$$

   $$= \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

   On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ.

   Conclusion : $\boxed{|Y - X| \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$