TD 11 : Variables à densité

1 Exercices d'application directe du cours

1 1. Montrer que la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.

2 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité dont on précisera une densité f.

3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$.
1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
2. Justifier que Y admet une espérance et une variance, et les déterminer.
3. (a) Montrer que si U suit la loi uniforme sur $]0,1]$, alors $X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$ suit la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$.
   (b) Écrire une fonction `python` permettant de simuler la variable aléatoire Y.
   (c) Déterminer des valeurs approchées de l'espérance et la variance de Y.

4 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 1 et de variance 2. On pose $Y = \mathrm{e}^{X+1}$.
1. Justifier que Y admet une espérance et une variance, et les déterminer.
2. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité.

2 Exercices classiques

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x/2}}{(n-1)!2^n} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer la convergence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que, pour tout $n \geqslant 2$, $I_n = 2(n-1)I_{n-1}$.
   En déduire I_n.
   (b) Montrer que f_n est une densité de probabilité.
2. On considère une variable aléatoire réelle X_n de densité f_n.
   Montrer que X_n admet une espérance et une variance à déterminer.

6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction f_n définie par :
$$f_n(t) = \begin{cases} \lambda_n\,\mathrm{e}^t \times \mathrm{e}^{1-\mathrm{e}^t} & \text{si } t \in [0,n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
1. Déterminer la valeur de λ_n en fonction de n de telle sorte que f_n soit une densité de probabilité.
2. On pose X_n une variable de densité f_n et $Y_n = \lfloor X_n \rfloor$ (partie entière). Déterminer la loi de Y_n.

7 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois normales respectives $\mathscr{N}(m_1,\sigma_1^2)$ et $\mathscr{N}(m_2,\sigma_2^2)$.
1. Rappeler les lois de $S = X+Y$ et de $-Y$. Déterminer la loi de $T = X-Y$.
2. On suppose que S et T sont indépendantes. Déterminer la loi de $S+T$ puis en déduire que $\sigma_1 = \sigma_2$.

$\boxed{8}$ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y.
On pose $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. On suppose que X et Y suivent une loi uniforme respectivement sur $[-1, 1]$ et $[0, 1]$.
   Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z et T.
   Simuler informatiquement les variables aléatoires Z et T. Calculer alors l'espérance et la variance empiriques de Z et T. Proposer un script permettant d'estimer informatiquement $\mathrm{P}(Z - T > 1)$.
2. On suppose que X et Y suivent les lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.
   Déterminer la loi suivie par T, reconnaître cette loi et en déduire l'espérance et la variance de T.

Les 3 exercices suivants utilisent la formule de convolution.
Si X et Y sont des variables aléatoires à densité indépendantes, alors $X + Y$ est une variable aléatoire à densité dont une densité f_{X+Y} est donnée par :

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(z-t)\, \mathrm{d}t.$$

$\boxed{9}$ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer une densité de $-X$.
2. En déduire que $X - Y$ est une variable à densité dont on déterminera une densité par convolution.
3. Vérifier que $Z = |X - Y|$ suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.

$\boxed{10}$ Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $]0, 1]$.

1. Soit $Y = -\ln U$. Déterminer la loi de Y.
2. Justifier que la variable aléatoire $Z = -\ln U - \ln V$ est à densité et déterminer une densité.
3. Calculer l'espérance de Z de deux façons.

$\boxed{11}$ Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a; a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où a est un réel strictement positif.

1. Déterminer la loi de U^2 (la reconnaître) et celle de $-V^2$.
2. Déterminer les lois de $X = U^2 + V^2$ et de $Y = U^2 - V^2$.
3. Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X et Y.

TD 12 : Applications linéaires

1 Exercices d'application directe du cours

$\boxed{1}$ Soit $m \in \mathbb{C}$. On considère l'application $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x - y + mz \ , \ mx - y + z \ , \ x + y + z)$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$.
2. Déterminer le rang de f suivant la valeur du paramètre m. Dans quel cas f est-il un automorphisme ?
3. Préciser une base du noyau et de l'image de f suivant la valeur du paramètre m.

$\boxed{2}$ On considère les matrices M et M' suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est M.

1. Que valent p et n ? Donner une base de $\operatorname{Ker} u$ et de $\operatorname{Im} u$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^p$ et une base de $\mathbb{R}^n$ dans lesquelles la matrice de u est M'.

$\boxed{3}$ Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 1 et 2 sont valeurs propres de M.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

$\boxed{4}$ On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} f_n : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & Q \end{array} \qquad \text{où} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x+1) - P(x)$$

1. Vérifier que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice M_3 de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Est-ce que f_3 est injective ? Déterminer le noyau de f_3.
4. L'endomorphisme f_3 est-il diagonalisable ?

$\boxed{5}$ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par : $\varphi(1) = -2X^2 - 2X + 3$, $\varphi(X) = -2X^2 + 1$ et $\varphi(X^2) = X^2 - 2X$.

1. Donner la matrice M de φ relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On pose $P = -X + 1,\ Q = X^2 + X,\ R = -X^2 + 1$. Montrer que $\mathscr{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice M' de φ relativement à la base $\mathscr{B}'$. Préciser la matrice de passage Π de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, ainsi que l'inverse de cette matrice. Donner une relation entre M, M' et Π.
4. Donner l'image par φ du polynôme $1 + X - X^2$ en utilisant M, puis en utilisant M'.
   (*on commencera par déterminer les coordonnées du polynôme* $1 + X - X^2$ *dans* $\mathscr{B}'$

2 Exercices classiques

$\boxed{6}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Soit $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$f(P) = (P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.
3. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer $f^{-1}(e_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

$\boxed{7}$ On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est A.
   Montrer que A et B sont semblables. On précisera une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la matrice de f est B et on donnera les matrices de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et inversement.
2. Calculer $(f + 2\,\mathrm{id})^n$ pour tout entier naturel n en utilisant la matrice B.

$\boxed{8}$ Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = MA - AM$.

1. Vérifier que φ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ? Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ et $\ker\varphi$.
4. Montrer que $\varphi^3 = 0$.

$\boxed{9}$ Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles définies sur $\mathbb{R}_+^*$, de degré inférieur ou égal à 4. On considère l'application φ qui à toute fonction de E associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(P)(x) = P(x) + 2\,x^4\,P(1/x).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Exprimer φ^2 en fonction de φ et de l'identité. En déduire une relation vérifiée par les valeurs propres de φ. Montrer que φ est bijective et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?