TD 12 : Applications linéaires

1 Exercices d'application directe du cours

1 Soit $m \in \mathbb{C}$. On considère l'application $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x - y + mz\ ,\ mx - y + z\ ,\ x + y + z)$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$.
2. Déterminer le rang de f suivant la valeur du paramètre m. Dans quel cas f est-il un automorphisme ?
3. Préciser une base du noyau et de l'image de f suivant la valeur du paramètre m.

2 On considère les matrices M et M' suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note u l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est M.

1. Que valent p et n ? Donner une base de $\operatorname{Ker} u$ et de $\operatorname{Im} u$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^p$ et une base de $\mathbb{R}^n$ dans lesquelles la matrice de u est M'.

3 Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 1 et 2 sont valeurs propres de M.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

4 On considère l'application :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & Q \end{array} \qquad \text{où} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = P(x+1) - P(x)$$

1. Vérifier que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice M_3 de f_3 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Est-ce que f_3 est injective ? Déterminer le noyau de f_3.
4. L'endomorphisme f_3 est-il diagonalisable ?

5 Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par : $\varphi(1) = -2X^2 - 2X + 3$, $\varphi(X) = -2X^2 + 1$ et $\varphi(X^2) = X^2 - 2X$.

1. Donner la matrice M de φ relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On pose $P = -X + 1,\ Q = X^2 + X,\ R = -X^2 + 1$. Montrer que $\mathscr{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer la matrice M' de φ relativement à la base $\mathscr{B}'$. Préciser la matrice de passage Π de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, ainsi que l'inverse de cette matrice. Donner une relation entre M, M' et Π.
4. Donner l'image par φ du polynôme $1 + X - X^2$ en utilisant M, puis en utilisant M'.
   (*on commencera par déterminer les coordonnées du polynôme* $1 + X - X^2$ *dans* $\mathscr{B}'$

2 Exercices classiques

6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux. Soit $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$f(P) = (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.
3. On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer $f^{-1}(e_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

$\boxed{7}$ On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est A.
   Montrer que A et B sont semblables. On précisera une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle la matrice de f est B et on donnera les matrices de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et inversement.
2. Calculer $(f + 2\,\mathrm{id})^n$ pour tout entier naturel n en utilisant la matrice B.

$\boxed{8}$ Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et φ l'application de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = MA - AM$.

1. Vérifier que φ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ? Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$ et $\ker\varphi$.
4. Montrer que $\varphi^3 = 0$.

$\boxed{9}$ Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles définies sur $\mathbb{R}_+^*$, de degré inférieur ou égal à 4. On considère l'application φ qui à toute fonction de E associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(P)(x) = P(x) + 2\,x^4\,P(1/x).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Exprimer φ^2 en fonction de φ et de l'identité. En déduire une relation vérifiée par les valeurs propres de φ. Montrer que φ est bijective et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?