TD 13 : Produit scalaire

1 Exercices d'application directe du cours

1 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}(v_1, v_3)$ où $v_1 = (-1, 1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 1)$ et $v_3 = (1, -1, 0, 1)$.
Déterminer une base orthonormale de F et de G.

2 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.
On définit les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-2, 1, 1)$ et $v_3 = (0, -1, 1)$.

1. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est orthogonale. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit un vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$.

2 Exercices classiques

3 Soit D la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $u = (-2, 1, 2)$.

1. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $v = (x, y, z)$ sur D.
2. En déduire la distance du vecteur $w = (1, 1, 1)$ à la droite D.

4 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
On pose : $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (-1, 1, -1, 1)$ et $v_2 = (1, 1, 1, 1)$.
Calculer la distance du vecteur $v = (1, 2, 3, 4)$ au sous-espace F.

5 On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On pose :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ x + y + z + t = 0\}.$$

1. Montrer que la famille composée de $v_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$ et $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$ est une base de F.
2. Déterminer un vecteur non nul w_2 de $\text{Vect}(v_1, v_2)$ orthogonal à v_1.
   Déterminer un vecteur non nul w_3 de F orthogonal à v_1 et w_2.
3. Justifier que (v_1, w_2, w_3) est une base de F.
4. On note p la projection orthogonale sur F. Étant donné un vecteur $v = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$, exprimer $p(v)$ en fonction de x, y, z, t en utilisant la base orthonormale précédente.
5. Retrouver ce résultat en considérant directement la définition d'une projection orthogonale.

6 On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que A est diagonalisable et déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que ${}^{t}PAP = D$.

7 Soit E un espace vectoriel de base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et f un endomorphisme de E de matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ la matrice de coefficients tous égaux à 1.

1. Déterminer une base du noyau et de l'image de f.
2. Justifier que f est diagonalisable et préciser une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.
3. Diagonaliser alors la matrice $M(a, b)$ carrée d'ordre n de coefficients $m_{i,j} = a$ si $i = j$ et $m_{i,j} = b$ sinon.

$\boxed{8}$ Pour $i \in [\![1;5]\!]$, on note (x_i, y_i) les cinq points suivants : $(1\,;\,3,6)$, $(2\,;\,4,7)$, $(4\,;\,6,9)$, $(6\,;\,9,6)$, $(7\,;\,10,6)$.
On souhaite déterminer les réels a et b minimisant la somme :

$$D(a,b) = \sum_{i=1}^{5} \left(y_i - a\,x_i - b\right)^2.$$

1. Représenter le nuage de points. Interpréter graphiquement le résultat recherché.
2. On considère les vecteurs $x = (1\,;\,2\,;\,4\,;\,6\,;\,7)$, $y = (3,6\,;\,4,7\,;\,6,9\,;\,9,6\,;\,10,6)$ et $z = (1\,;\,1\,;\,1\,;\,1\,;\,1)$.
   (a) Exprimer la somme $D(a,b)$ en fonction de x, y et z puis interpréter cette somme d comme le carré de la distance du vecteur y à un plan vectoriel P à préciser.
   (b) Déterminer un vecteur v de $\mathrm{Vect}(x,z)$ orthogonal à z, puis une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(x,z)$.
   (c) En déduire la projection orthogonale de y sur P, puis les coefficients a et b cherchés.

$\boxed{9}$ Soit n un entier naturel non nul et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $S = {}^{\mathrm{t}}MM$.

1. Montrer que les valeurs propres de S sont positives.
   Pour X vecteur propre de S, on pourra calculer ${}^{\mathrm{t}}XSX$ de deux manières différentes.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(S) \subset \mathrm{Ker}(M)$. *Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pourra étudier $\|MX\|^2$.*
   (b) En déduire que $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Ker}(M)$.
3. Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives si, et seulement si, M est inversible.