TD 14 : Couples de variables aléatoires discrètes

1 Exercices d'application directe du cours

1 On considère un couple de variables aléatoires réelles (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe donnée par :

$$\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathrm{P}([X=n] \cap [Y=m]) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2^{n+1}\,m!}.$$

1. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y, et donner leurs espérance et variance.
2. Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.
3. Calculer $\mathrm{P}([2 < X \leqslant 4] \cap [Y < 2])$.

2 Le nombre de graines plantées dans un jardin est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre γ. Chaque graine a la probabilité p de germer. Soit S le nombre de graines qui ont germé.

1. Préciser la loi de S sachant $N = n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer la loi du couple (S, N).
3. Déterminer alors la loi de S ainsi que son espérance et sa variance.

3 Une urne contient trois boules blanches, deux boules vertes et une boule jaune. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue dans cette urne n tirages successifs d'une boule avec remise. Soit X le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules vertes obtenues.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4 Pour n entier naturel, on considère une urne contenant des jetons numérotés de 0 à n. On extrait successivement deux jetons avec remise. Déterminer la loi de la somme des numéros des deux jetons extraits.

5 Soient $(p, q) \in]0; 1[^2$. On considère des variables aléatoires X et Y indépendantes qui suivent des lois géométriques de paramètre p et q respectivement.

1. Déterminer la probabilités $\mathrm{P}(X = Y)$.
2. On suppose que $p = q$. En remarquant que $((X = Y), (X > Y), (X < Y))$ est un système complet d'événements, calculer $\mathrm{P}(X > Y)$.

2 Exercices classiques

6 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On extrait successivement deux jetons **sans** remise. On note X la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton et Y la variable aléatoire égale au numéro du second jeton.

1. Donner la loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi et l'espérance de $X + Y$.

7 Soit n un entier naturel. On répartit n boules au hasard dans 3 urnes. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose X_i le nombre de boules mises dans la i-ème urne.

1. Déterminer les lois de $X_1, X_2, X_3, X_1 + X_2$.
2. Calculer la covariance du couple (X_1, X_2) en utilisant la variance de $X_1 + X_2$.

8 La probabilité d'obtenir pile lors du lancer d'une pièce de monnaie est p ($p \in]0, 1[$). On effectue une infinité de lancers, indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au numéro du lancer où l'on obtient le premier pile et Y la variable aléatoire égale au numéro du lancer où l'on obtient le deuxième pile.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Donner la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.

9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n telles que pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, l'urne k contient des jetons numérotés de 1 à k. On choisit une urne au hasard : soit X le numéro de l'urne choisie. On tire au hasard un jeton dans cette urne : soit Y le numéro du jeton tiré.

1. Donner la loi de X. X admet-elle une espérance ? si oui, la calculer.
2. Calculer la loi du couple (X, Y).
3. Donner la loi de Y. Y admet-elle une espérance ? si oui, la calculer.
4. Déterminer si les variables X et Y sont indépendantes. Calculer la covariance du couple si elle existe.

10 Soit $n \geqslant 2$. On dispose de deux urnes : la première urne $\mathscr{U}_1$ contient $(n+1)$ jetons numérotés de 0 à n ; la seconde urne $\mathscr{U}_2$ contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un jeton de l'urne $\mathscr{U}_1$, on note son numéro N, puis on tire une poignée de N jetons de l'urne $\mathscr{U}_2$.

1. Déterminer l'espérance et la variance du nombre aléatoire N.
2. Soit X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le jeton i de l'urne $\mathscr{U}_2$ a été tiré et la valeur 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de X_i ? son espérance ? sa variance ?
   (b) Déterminer pour $i \neq j$ la covariance des couples (X_i, X_j). Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

11 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de même loi géométrique de paramètre $a \in]0;1[$. On définit la variable aléatoire Z par :

$$Z = \begin{cases} X - Y & \text{si } X \geqslant Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner la loi de Z, puis calculer son espérance.

12 On considère des variables aléatoires indépendantes X et Y qui suivent respectivement des lois binomiales $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(n,q)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in]0;1[$.

1. On suppose dans cette question que $q = p$.
   (a) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
   (b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. On suppose dans cette question que $q = 1 - p$ et on définit la matrice aléatoire $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 2 & Y \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer la probabilité que A soit inversible.
   (b) Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

13

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$). Déterminer la loi de X sachant que $(X + Y = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Même question si X et Y suivent une loi géométrique de même paramètre p.