TD 15 : Théorèmes limites

1 Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?
On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

2 Un village isolé compte 10 000 habitants. Le pharmacien désire stocker suffisamment de sérum antivenimeux pour avoir 999 chances sur 1000 de parer à une urgence. La probabilité qu'un habitant soit mordu par un serpent un jour donné est $0,001$. Quel stock journalier de boîtes de sérum le pharmacien doit-t-il conserver ?
On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

3 Dans une population, il y a 20% de malades. On prélève indépendamment un échantillon de 500 individus. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne 80 malades, puis la probabilité que l'échantillon contienne entre 50 et 150 malades.
On utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

4 Soit X une variable aléatoire d'espérance nulle et de variance σ^2.

1. Soit $a > 0$ et $t > 0$.
   (a) Calculer $E\big((X+t)^2\big)$ en fonction de σ et t.
   (b) Montrer alors à l'aide de l'inégalité de Markov que : $\mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + t^2}{(a+t)^2}$.
2. En déduire que : $\forall a > 0,\ \mathrm{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$.

5 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ de même loi dont une densité est la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (t-\theta)\, e^{-(t-\theta)} & \text{si } t > \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt$ converge et vaut $k!$.
2. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $Y_k = X_k - \theta$. Déterminer une densité de Y_k, son espérance et sa variance.
3. En déduire l'espérance et la variance de M_n.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(M_n \leqslant \theta + 2)$.

6 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées de moyenne m et de variance σ^2 non nulle. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Rappeler la loi faible des grands nombres puis calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(M_n \leqslant x)$ dans les cas $x < m$ et $x > m$.
2. En utilisant le théorème central limite, montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(M_n \leqslant m) = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que (M_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi à préciser.

7 Après des années d'efforts, des géologues ont obtenu 4 mesures de la constante hyperfine de sédimentation d'une planète lointaine :

$$3,23 \quad 3,28 \quad 3,43 \quad 3,21.$$

Tester au risque 5% l'hypothèse « la constante hyperfine de sédimentation est égale à π ».

8 Une roulette possède 37 numéros. Sur 10000 parties, le zéro est sorti 298 fois. Tester au risque d'erreur 5% si la roulette est équilibrée.