TD 16 : Fonctions de deux variables

1 Exercices d'application directe du cours

1 Soit f la fonction définie par $f(x,y)=x^2+\dfrac{x}{y^2}$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x,x)),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)\Big),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,x),\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)\Big).$$

2 Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y)=f(xy,x-y)$.
Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de g en fonction de celles de f.

2 Exercices classiques

3 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2xy+z^3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^2\quad\text{et}\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3xz^2.$$

4 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y)=\int_0^y (x-t)f(t)\,dt.$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.
La fonction g admet-elle des dérivées partielles d'ordre deux ?

5 **Changement de variables en coordonnées polaires**

1. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles, telles que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et g est définie par :
$$\forall (r,\theta)\in\mathbb{R}^2,\quad g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$
Justifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial\theta}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. On suppose désormais que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et g de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*\times]-\pi/2;\pi/2[$.
   (a) Qu'induisent ces conditions sur le changement de variables en coordonnées polaires ?
   (b) Trouver les fonctions f vérifiant :
   $$-y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$
   (c) Trouver les fonctions f vérifiant :
   $$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y).$$

6 Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=\frac{x}{y^3}$$

.

$\boxed{7}$ On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On souhaite intégrer l'équation aux dérivées partielles ci-dessus en utilisant le changement de variables $u = x + 2y$ et $v = x - y$.

1. Montrer que l'on définit bien une fonction g de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles en posant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x + 2y, x - y).$$

2. Justifier que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles secondes de f en fonction des dérivées partielles de g.
3. Montrer alors que l'équation précédente (E) est équivalente à l'équation :

$$(F) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

4. En déduire les fonctions f solutions.

$\boxed{8}$ On considère le système différentiel :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} u'(t) = \big(v(t)\big)^2 \\ v'(t) = \sin\big(u(t)\big) \end{cases}$$

où u et v sont deux fonctions de classe C^1 de la variable réelle.

1. Déterminer les solutions constantes de $(\mathcal{S})$.
2. Soit $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire une condition portant sur les dérivées partielles de V pour que la fonction $t \mapsto V\big(u(t), v(t)\big)$ soit constante quand le couple (u, v) est solution de $(\mathcal{S})$.
3. Montrer que la fonction V_0 définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$V_0(x, y) = \cos x + \frac{y^3}{3}$$

vérifie la condition précédente.
4. On admet l'unicité de la solution (α, β) de $(\mathcal{S})$ vérifiant la condition initiale $\alpha(0) = 0$ et $\beta(0) = -\sqrt[3]{6}$.
En utilisant la question (3), donner une relation entre $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\alpha(0)$ et $\beta(0)$.
En déduire l'expression de β en fonction de α.

$\boxed{9}$ Déterminer les extrema de la fonction définie par $f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 + y^2 - 2y$.

$\boxed{10}$ Déterminer les extrema de la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + x^2 y + y^2$.