Programme de colles
Semaine 16 du 27/01 au 31/01/2025

Variables aléatoires réelles (VAR) à densité

- Densité de probabilité : f positive sur $\mathbf{R}$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points, telle que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f$ converge et vaut 1.
- Variable aléatoire réelle à densité.
- Si f est une densité de probabilité, alors il existe une VAR à densité X dont f est une densité.
- Fonction de répartition d'une VAR de densité f_X : $\forall x \in \mathbf{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$
- Si I est un intervalle, expression de $\mathbf{P}(X \in I)$ à l'aide d'une intégrale portant sur f_X.
- Caractérisation d'une VAR à densité à l'aide de sa fonction de répartition F_X :
  X admet une densité ssi F_X est continue sur $\mathbf{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Dans ca cas, la fonction f obtenue en posant $f(t) = F_X'(t)$ lorsque c'est possible, et $f(t) = 0$ sinon est une densité de X.
- Exemples simples de composées d'une VAR à densité X par une fonction $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{R}$:
  - ∗ on admet que $Y = g(X)$ est une VAR.
  - ∗ Y est une VAR discrète ssi $Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
  - ∗ Y admet une densité ssi F_Y vérifie la caractérisation précédente.
- Moments d'une VAR à densité. Espérance $\mathbf{E}(X)$, variance $\mathbf{V}(X)$ (écart-type $\sigma(X)$).
- Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance.
- Théorème de transfert.
- Variance de $aX + b$.
- Théorème de König-Huygens.
- VAR centrée, réduite. Si X est une VAR admettant une variance non nulle, alors $X^\star = \dfrac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est la VAR centrée réduite associée à X.
- Loi uniforme sur $[a, b]$: $\mathcal{U}\big([a, b]\big)$, densité, fonction de répartition, espérance, variance.
- Loi exponentielle : $\mathcal{E}(\lambda)$, densité, fonction de répartition, espérance, variance.
- Loi normale (ou gaussienne) centrée réduite : $\mathcal{N}(0, 1)$, densité notée φ, espérance, variance.
- Loi normale de paramètres μ, σ^2 : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, densité, espérance, variance.
- Si X suit une loi normale, alors $\forall a, b\,(a \neq 0)$, $aX + b$ suit une loi normale.
  En particulier, $X^\star$ suit une loi normale centrée réduite.

Questions de cours :

1. Donner la définition d'une densité de probabilité.
2. À quelles conditions sur sa fonction de répartition une VAR X admet-elle une densité ?
   Comment dans ce cas définir une densité de X ?
3. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette un moment d'ordre r et le définir.
4. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette une espérance et la définir.
5. Donner une condition pour qu'une VAR X de densité f admette une variance et la définir.
6. Donner espérance et variance de $Y = aX + b$ en précisant les conditions.
7. Citer le théorème de transfert.
8. Définir la variable centrée réduite associée à une VAR X en précisant les conditions.
9. Densité, fonction de répartition, espérance et variance de la loi uniforme sur $[a, b]$.
10. Densité, fonction de répartition, espérance et variance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
11. Densité, fonction de répartition, espérance et variance d'une loi normale de paramètres μ, σ^2.
12. Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.
13. Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi normale d'espérance 1 et de variance 1.