

DS n°4, mathématique

Durée : 2 heures

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la qualité de la rédaction et de la présentation.
L'usage des calculatrices est interdit. Le sujet comporte 1 feuille recto/verso.

Exercice 1 : Espaces vectoriels de polynômes

On note $E = \mathbf{R}_4[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 à coefficients réels. On considère les trois sous-ensembles suivants :

$$F = \text{Vect}(X^4 + X^2 + 1, X^4 - X^2, X^4 - 1)$$

$$G = \{P \in E \mid \forall x \in \mathbf{R}, P(-x) = -P(x)\}$$

$$H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}.$$

- Donner la base canonique $\mathcal{C}$ et la dimension de E .
- Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer une base $\mathcal{B}_F$ de F et en déduire la dimension de F .
 - Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer une base $\mathcal{B}_G$ de G et en déduire la dimension de G .
 - Montrer que $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_G \cup \mathcal{B}_F$ est une base de E .
 - En déduire que tout polynôme de E peut s'écrire comme la somme d'un polynôme de F et d'un polynôme de G .
- Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer une base $\mathcal{B}_H$ de H et en déduire la dimension de H .
- Justifier que $G \cap H$ est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer une base de $G \cap H$ et en déduire la dimension de $G \cap H$.
- On considère les polynômes suivants :

$$T_1 = X - 1$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(X - 1)^2$$

$$T_3 = \frac{1}{6}(X - 1)^3$$

$$T_4 = \frac{1}{24}(X - 1)^4$$

- Justifier que T_1, T_2, T_3, T_4 appartiennent à H .
- Montrer que $\mathcal{B} = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ est une base de H .
- On considère le polynôme $P = 2X^4 - 9X^3 + 17X^2 - 14X + 4$.

- Vérifier que $P \in H$.
- Donner la décomposition de P dans la base $\mathcal{B}_H$ de H .
- Déterminer la décomposition de P dans la base $\mathcal{B}$ de H .

On pensera à utiliser les valeurs des polynômes dérivés successifs de P en 1.

Exercice 2 : Variables aléatoires à densité

On note X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et Φ sa fonction de répartition. On pose $Y = |X|$ (valeur absolue de X) et on note F_Y sa fonction de répartition.

1. (a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$.
En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y .
(b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.
(c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$

- (a) Montrer que $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$.

On utilisera le changement de variable $u = \sqrt{2t}$.

- (b) En déduire que g est une densité.
3. On note Z une variable aléatoire de densité g , de fonction de répartition G et on pose $T = \sqrt{2Z}$.
(a) Déterminer une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y .
(b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.
4. On admet que si U et V sont deux variables à densité indépendantes de densité respectivement f_U et f_V alors $U + V$ est une variable à densité dont une densité est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t) dt.$$

Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que Z .

- (a) À l'aide du changement de variable $t = x \sin^2 u$, montrer que, pour tout $x > 0$,
l'intégrale $I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}}$ est convergente et donner sa valeur.
- (b) Déterminer la loi de $Z_1 + Z_2$.
- (c) Justifier que $Z_1 + Z_2$ admet une espérance et donner sa valeur.