I Rappels de géométrie plane ou de l'espace

1 Vecteurs de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$

Soit $u = (x, y)$ ou $u = (x, y, z)$ un vecteur du plan ou de l'espace.
La matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$ est donc : $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

DÉFINITION

Deux vecteurs u et v du plan ou de l'espace sont **colinéaires** si et seulement si :
$$\exists \lambda \in \mathbf{R},\ u = \lambda v \text{ ou } v = \lambda u.$$

PROPOSITION

$$\begin{aligned} u, v \text{ colinéaires} &\Leftrightarrow \text{la famille } (u, v) \text{ n'est pas libre (elle est liée)} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(u, v) \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow \det(u, v) = xy' - x'y = 0 && \text{pour des vecteurs du plan} \\ &\Leftrightarrow xy' - x'y = yz' - y'z = zx' - z'x = 0 && \text{pour des vecteurs de l'espace} \end{aligned}$$

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère les vecteurs $u = (5a, 3)$ et $v = (10, 3a)$ dans $\mathbf{R}^2$.
Déterminer tous les réels a pour lesquels (u, v) est une base de $\mathbf{R}^2$.

DÉFINITION

Le **produit-scalaire** de deux vecteurs u, v du plan ou de l'espace est le réel défini par :
$$\langle u, v \rangle = \langle u \mid v \rangle = (u \mid v) = u \cdot v = xx' + yy' \quad \text{ou} \quad xx' + yy' + zz'$$
La **norme** de u est : $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ou $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Un vecteur de norme 1 est dit **normé**.

Remarque : on note parfois $u^2 = \langle u, u \rangle$ le **carré scalaire** de u.

Exercice 2 : Montrer que : $\forall u, v \in \mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$.

PROPOSITION

$\forall u, v \in \mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$, $\langle u, v \rangle = ||u|| \times ||v|| \times \cos(\widehat{u, v})$

DÉFINITION

Deux vecteurs du plan ou de l'espace sont dits **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est nul.
$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$
Une famille de vecteurs du plan ou de l'espace est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont 2 à 2 orthogonaux. Si de plus ils sont normés, alors on dit que la famille est **orthonormale**.

Exemple : les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$ sont des bases orthonormales.

2 Droites du plan

a) Droite donnée par un point et un vecteur-directeur

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point $A(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ et de vecteur-directeur $u = (a, b) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } M(x, y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } u \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, u\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$
: on a trouvé une **équation cartésienne** de $\mathcal{D}$.

Réciproquement : soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
Alors $\mathcal{D}$ admet pour vecteur-directeur le vecteur $u = (-b, a)$.

$$\begin{aligned} \text{De plus : } M(x, y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } u \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda u = (\lambda a, \lambda b) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbf{R}) \end{aligned}$$
: c'est une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$.

b) Droite donnée par deux points distincts

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les points $A(x_0, y_0)$ et $B(x_1, y_1) \in \mathcal{P}$.
On applique la méthode précédente en utilisant le vecteur-directeur $u = \overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

c) Droite donnée par un point et un vecteur-normal

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point $A(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ et de vecteur-normal $n = (a, b) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } M(x, y) \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } n \text{ sont orthogonaux} \\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, u \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$
: c'est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

Réciproquement : soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$, $a,b,c \in \mathbf{R}$ et $(a,b) \neq (0,0)$. Alors $\mathcal{D}$ admet pour vecteur-normal le vecteur $n=(a,b)$.

Exercice 3 : Soit $\mathcal{D}$ la droite du plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $2x+3y+7=0$.
On considère le point $A(-1,2)$, le vecteur $u=(3,2)$ et la droite Δ passant par A et dirigée par u.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
2. Déterminer l'intersection entre $\mathcal{D}$ et Δ.

3 Cercles du plan

a) Cercle donné par son centre et son rayon

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_0,y_0)$ et de rayon $R \in \mathbf{R}_+^\star$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } M(x,y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow ||\overrightarrow{\Omega M}||^2 = R^2\\ &\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \quad \text{ce qui donne l'équation cartésienne du cercle } \mathcal{C}.\end{aligned}$$

b) Cercle donné par un diamètre

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ où $A(x_1,y_1)$ et $B(x_2,y_2)$ sont deux points distincts du plan.

$$\begin{aligned}\text{Alors } M(x,y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ sont orthogonaux}\\ &\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM} \rangle = 0 \Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0\end{aligned}$$

c) Représentation paramétrique d'un cercle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'équation : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^2+\left(\dfrac{y-x_0}{R}\right)^2=1$.

On pose $\dfrac{x-x_0}{R}=\cos(\theta)$, on a $\dfrac{y-y_0}{R}=\sin(\theta)$ et $\mathcal{C} : \begin{cases} x = x_0 + R\cos(\theta) \\ y = y_0 + R\sin(\theta) \end{cases} \quad (\theta \in \mathbf{R})$

d) Éléments caractéristiques d'un cercle

Soit $E = \{M(x,y) \in \mathcal{P}\,,\, x^2+y^2+ax+by+c=0\}$ où a,b,c sont trois réels donnés.

Alors : $x^2+y^2+ax+by+c = \left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}+c$

donc $E : \left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=d$ où $d=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-c$.

Si $d<0$, alors $E=\varnothing$. Si $d=0$, alors $E=\{\Omega\}$ où $\Omega\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$.

Si $d>0$, alors E est le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{d}$.

Exercice 4 :

1. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, où $A(3,1)$ et $B(7,-1)$.
   Préciser son centre et son rayon.
2. Déterminer l'ensemble $E = \{M(x,y) \in \mathcal{P} \mid x^2+y^2-8x-6y+10=0\}$, puis préciser $\mathcal{C} \cap E$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation : $x+3y-4=0$. Déterminer $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

4 Plans de l'espace

a) Plan donné par un point et deux vecteur-directeurs non colinéaires

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{E}$ et dirigé par $u=(a,b,c), v=(a',b',c')$, u,v non colinéaires.

$$\begin{aligned}\text{Alors } M(x,y,z) \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ est une combinaison linéaire de } u \text{ et } v\\ &\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda u + \mu v\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad (\lambda,\mu \in \mathbf{R})\end{aligned}$$

On a trouvé un **système d'équations paramétriques** du plan $\mathcal{P}$.

Réciproquement :
soit $\mathcal{P}$ un plan admettant un système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad (\lambda,\mu \in \mathbf{R})$

Alors $u=(a,b,c)$ et $v=(a',b',c')$ sont des vecteur-directeurs de $\mathcal{P}$, et $A(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{P}$.

b) Plan donné par trois points non alignés

Rappel : trois points non alignés A,B,C de l'espace définissent un plan, noté (ABC).
On trouve des équations paramétriques de (ABC) par la méthode précédente, avec $u=\overrightarrow{AB}$ et $v=\overrightarrow{AC}$.

c) Plan donné par un point et un vecteur-normal
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par un point $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ et de vecteur-normal $n(a, b, c)$.
Alors $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et n sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{AM}, n \rangle = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$: c'est une **équation cartésienne** de $\mathcal{P}$.

Réciproquement :
Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Alors $n = (a, b, c)$ est un vecteur-normal au plan $\mathcal{P}$. Tout vecteur non nul et orthogonal à n dirige $\mathcal{P}$.

5 Droites dans l'espace

a) Droite donnée par un point et un vecteur-directeur
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ et de vecteur-directeur $u = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.
Alors : $M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$: c'est une **représentation paramétrique** de $\mathcal{D}$.

Si $\mathcal{D} = (AB)$ avec A, B deux points distincts de l'espace, on utilise le vecteur $u = \overrightarrow{AB}$.

b) Intersection de plans dans l'espace
Deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de l'espace sont :

$*$ ou bien parallèles (strictement ou confondus),
$*$ ou bien sécants, et leur intersection est alors une droite.

Soient $\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}_2 : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans de l'espace.
Alors $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles si et seulement si ils ont des vecteurs normaux colinéaires :

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles $\Longleftrightarrow$ $n_1 = (a, b, c)$ et $n_2 = (a', b', c')$ sont colinéaires

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, on pose $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
Alors $\mathcal{D}$ admet un **système d'équations cartésiennes** :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in \mathcal{P}_1 \\ M \in \mathcal{P}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans donnés l'un par une équation cartésienne, et l'autre par une représentation paramétrique :

$$\mathcal{P}_1 : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 : \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$$

Alors $n = (a, b, c)$ est normal à $\mathcal{P}_1$, $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ dirigent $\mathcal{P}_2$,
et on a : $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles $\Leftrightarrow \begin{cases} n \perp u \\ n \perp v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle n, u \rangle = 0 \\ \langle n, v \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0 \end{cases}$

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles, on pose $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.
On exprime μ en fonction de λ grâce à : $a(x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha') + b(y_0 + \lambda\beta + \mu\beta') + c(z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma') + d = 0$
On remplace μ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{P}_2$ pour obtenir un paramétrage de $\mathcal{D}$.

Exercice 5 :
On considère dans l'espace les points $A(1, 1, 0), B(2, 1, -1)$ et $C(3, 2, 1)$. Soit $n = (1, 1, 2) \in \mathbf{R}^3$.

1. Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés. On pose $\mathcal{P}_1$ le plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$.
3. Soit $\mathcal{P}_2$ le plan passant par A et de vecteur-normal n. Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
4. Soit $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

II Produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$

1 Définition

Définition

> Soient $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
> Alors le **produit-scalaire** de u et v est le réel défini par : $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Écriture matricielle dans la base canonique :
Soient $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$, où $\mathcal{C}$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Alors $U^T = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ donc : $\boxed{\langle u, v\rangle = U^T\, V.}$

Définition

> Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. La **norme euclidienne** de u est le réel : $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
> Un vecteur de norme 1 est dit **normé**, ou **unitaire**.

Exercice 6 : Dans $\mathbf{R}^4$, on pose $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -1, 1, -1)$. Calculer $\langle u, v\rangle$, $||u||$ et $||v||$.

2 Propriétés

Propriété

- $*$ le produit scalaire est **bilinéaire** :
  $\forall u_1, u_2, v \in \mathbf{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\langle \lambda u_1 + u_2, v\rangle = \lambda\langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$
  $\forall u, v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\langle u, \lambda v_1 + v_2\rangle = \lambda\langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle$
- $*$ le produit scalaire est **symétrique** : $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
- $*$ le produit scalaire est **positif** : $\forall u \in \mathbf{R}^n$, $\langle u, u\rangle \geqslant 0$.
- $*$ le produit scalaire est **défini** : $\forall u \in \mathbf{R}^n$, $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Proposition $**$ **Inégalité de Cauchy-Schwarz** $**$

$\forall u, v \in \mathbf{R}^n$, $|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u|| \times ||v||$ avec égalité ssi u et v sont colinéaires.

Remarque : on a donc, dès que $u, v \neq 0$: $-1 \leqslant \dfrac{\langle u, v\rangle}{||u|| \times ||v||} \leqslant 1$

donc il existe un unique angle $\theta \in [0, \pi]$ tel que : $\cos(\theta) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{||u|| \times ||v||}$. On peut définir : $\widehat{u, v} = \theta$.

Propriété

- $*$ $\forall u \in \mathbf{R}^n$, $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- $*$ $\forall u \in \mathbf{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $||\lambda u|| = |\lambda| \times ||u||$
- $*$ $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$, $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$ (**inégalité triangulaire**).
  et $||u + v|| = ||u|| + ||v|| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}_+$, $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$ (u, v colinéaires et de même sens).

3 Orthogonalité

Définition

> Deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire est nul : $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$.
> Deux matrice-colonnes $M, N \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ sont dites orthogonales ssi $M^T\, N = 0$.
> Une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont 2 à 2 orthogonaux. Si de plus ils sont normés, alors on dit que la famille est **orthonormale**.

Exemple : la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est une famille orthonormale.
Méthode : on obtient une famille orthonormale à partir d'une famille orthogonale en multipliant tout vecteur de cette famille par l'inverse de sa norme.

Proposition

Toute famille orthogonale de $\mathbf{R}^n$ ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Théorème $**$ **Théorème de Pythagore** $**$

Soient u, v orthogonaux dans $\mathbf{R}^n$. Alors : $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$

4 Bases orthonormales

Définition

> Une base de $\mathbf{R}^n$ qui est aussi une famille orthonormale est appelée **base orthonormale** de $\mathbf{R}^n$.

Proposition $**$ **Caractérisation des bases orthonormales** $**$

Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de $\mathbf{R}^n$, de cardinal n.
Alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Remarque : on utilise aussi cette caractérisation pour des bases orthonormales de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$, de dimension p. Il faut alors s'assurer que $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = p$.

Théorème (*admis*)

Tout sous-espace vectoriel non nul de $\mathbf{R}^n$ admet une base orthonormale.

Exercice 7 : Dans $\mathbf{R}^4$, on pose $u=(1,1,1,1)$, $v=(0,1,0,1)$, $w=(0,0,1,0)$ et $F=\mathrm{Vect}(u,v,w)$.

1. Montrer que $\mathcal{B}=(u,v,w)$ est une base de F.
2. Construire une base orthonormale (a,b,c) de F telle que : $\begin{cases}\mathrm{Vect}(a)=\mathrm{Vect}(u)\\ \mathrm{Vect}(a,b)=\mathrm{Vect}(u,v)\end{cases}$

Proposition

Le produit scalaire et donc la norme se calculent de la même façon dans toutes les bases orthonormales de $\mathbf{R}^n$: soient $u,v\in\mathbf{R}^n$, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$.
On pose $U=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u), V=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.
Alors : $\langle u,v\rangle = U^T\,V=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iy_i$ où $U=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

Corollaire

La matrice de passage entre 2 bases orthonormales de $\mathbf{R}^n$ vérifie : $P^T\,P=I_n$ (*ie* : $P^{-1}=P^T$).

Théorème ∗∗ **Théorème spectral** (version complète) ∗∗

Soit A une matrice symétrique à coefficients réels : $A\in\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

1) On suppose que λ,μ sont deux valeurs propres distinctes de A.
Soient $X\in E_\lambda$ et $Y\in E_\mu$. Alors X et Y sont orthogonales : $X^T\,Y=0$.

2) A est diagonalisable, et il existe une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ constituée de vecteurs propres.

III Projections orthogonales

1 Orthogonal d'un s-ev de $\mathbf{R}^n$

Définition

Soit A une partie de $\mathbf{R}^n$. On appelle **orthogonal** de A, et on note $A^\perp$, le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ constitué des vecteurs qui sont orthogonaux à tout vecteur de A.

$$A^\perp=\{u\in\mathbf{R}^n \mid \forall v\in A,\ u\perp v\}$$

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Alors :

1. $F\cap F^\perp=\{0_{\mathbf{R}^n}\}$.
2. $\forall u\in\mathbf{R}^n,\ \exists!\,(u_F,u_{F^\perp})\in F\times F^\perp \mid u=u_F+u_{F^\perp}$

Exercice 8 : Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par : $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid y-t=0\}$.
Déterminer $F^\perp$. Soit $u=(1,1,0,0)$. Trouver $v\in F$, $w\in F^\perp$ tels que : $u=v+w$.

2 Projection orthogonal sur un s-ev de $\mathbf{R}^n$

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. On appelle **projection orthogonale** sur F l'endomorphisme p_F de $\mathbf{R}^n$ défini par : $\forall u\in\mathbf{R}^n,\ u=u_F+u_{F^\perp}$ et on pose : $p_F(u)=u_F$.

Exemples : $p_{\mathbf{R}^n}=\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}$ et $p_{\{0\}}=0_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)}$

Propriété

Soit F un sous-espace de $\mathbf{R}^n$ et p_F la projection orthogonale sur F. Alors :

1. $p_F\circ p_F=p_F$
2. $\mathrm{Im}(p_F)=F$
3. $\mathrm{Ker}(p_F)=F^\perp$

Corollaire

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Alors : $\dim(F)+\dim(F^\perp)=n$.

PROPRIÉTÉ **$**$ Expression de la projection orthogonale $**$**

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ non nul, de base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_r)$.

1. si $\mathcal{B}$ est orthogonale, alors : $\forall u \in \mathbf{R}^n,\ p_F(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{\langle u, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$
2. si $\mathcal{B}$ est orthonormale, alors : $\forall u \in \mathbf{R}^n,\ p_F(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \langle u, f_i \rangle\, f_i$

Exercice 9 : Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par : $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid y - t = 0\big\}$.

1. Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 1, 0, 0)$ sur F.
2. Déterminer la matrice M de la projection orthogonale p_F dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

3 Distances dans $\mathbf{R}^n$

DÉFINITION

On appelle **distance euclidienne** (ou simplement : distance) entre deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ la norme euclidienne de leur différence : $\forall u, v \in \mathbf{R}^n,\ \mathrm{d}(u, v) = ||u - v||$

Exercice 10 : Calculer dans $\mathbf{R}^4$ la distance entre $u = (1, 1, 0, 0)$ et $v = (0, 1, 0, 1)$.

PROPRIÉTÉ

Soient $u, v, w \in \mathbf{R}^n$. Alors : $*\ \mathrm{d}(u, v) = \mathrm{d}(v, u)$
$*\ \mathrm{d}(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
$*\ \mathrm{d}(u, w) \leqslant \mathrm{d}(u, v) + \mathrm{d}(v, w)$

DÉFINITION

Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ non vide, et soit $u \in \mathbf{R}^n$. La distance de u à A est : $\mathrm{d}(u, A) = \inf \{\mathrm{d}(u, a),\ a \in A\}$.

PROPOSITION

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, et soit $u \in \mathbf{R}^n$. Alors : $\mathrm{d}(u, F) = ||u - p_F(u)||$.
De plus, si $v \in F$ et si $\mathrm{d}(u, v) = \mathrm{d}(u, F)$, alors $v = p_F(u)$.

Exercice 11 : Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ défini par : $F = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid y - t = 0\big\}$.
On pose $u = (1, 1, 0, 0)$. Déterminer $\mathrm{d}(u, F)$.

4 Projections dans le plan $\mathcal{P}$

Soit $M(x_0, y_0)$ un point du plan, et $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite connue par une équation cartésienne. Le **projeté orthogonal** H de M sur $\mathcal{D}$ est l'intersection de $\mathcal{D}$ avec l'unique droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par M. La distance entre M et la droite $\mathcal{D}$ est donnée par : $\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = MH$.
Soient $u = \overrightarrow{OM}$, $n = (a, b)$ vecteur-normal à $\mathcal{D}$. Alors : $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire à n : $\exists \lambda \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{MH} = \lambda n$.

Puis $H \in \mathcal{D}$ donne : $a(x_0 + a\lambda) + b(y_0 + b\lambda) + c = 0$ dont on déduit que : $\lambda = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$

On a donc : $MH = |\lambda| \times ||n|| = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Soit A un point quelconque de $\mathcal{D}$. Soit $u = (-b, a)$ un vecteur-directeur de $\mathcal{D}$.

Les coordonnées de H se trouvent en exprimant : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\langle \overrightarrow{AM}, u \rangle}{\langle u, u \rangle}\, u$

5 Projections dans l'espace $\mathcal{E}$

Soit $M(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, et $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ un plan connu par une équation cartésienne. Le **projeté orthogonal** H de M sur $\mathcal{P}$ est l'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'unique droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par M. La distance entre M et le plan $\mathcal{P}$ est donnée par : $\mathrm{d}(M, \mathcal{P}) = MH$.

Soit $n = (a, b, c)$ un vecteur-normal à $\mathcal{P}$. On trouve les coordonnées de H en exprimant : $\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ n \text{ et } \overrightarrow{MH} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$

$\overrightarrow{MH} = \lambda n$ donc $H \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a(x_0 + a\lambda) + b(y_0 + b\lambda) + c(z_0 + c\lambda) + d = 0$ donc $\lambda = -\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$

Enfin, $\mathrm{d}(M, \mathcal{P}) = MH = |\lambda| \times ||n||$ donc $MH = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Soit A un point quelconque de $\mathcal{P}$. Soient u, v deux vecteurs-directeurs de $\mathcal{P}$, non colinéaires.

Les coordonnées de H se trouvent en exprimant : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\langle \overrightarrow{AM}, u \rangle}{\langle u, u \rangle}\, u + \dfrac{\langle \overrightarrow{AM}, v \rangle}{\langle v, v \rangle}\, v$