Corrigé du DS n°4

Exercice 1 : Espaces vectoriels de polynômes

1. On rappelle que la base canonique de $E = \mathbf{R}_4[X]$ est $\boxed{\mathcal{C} = \left(1, X, X^2, X^3, X^4\right)}$ et que $\boxed{\dim E = 5.}$

2. (a) D'après l'énoncé, F est le sous-espace vectoriel de E engendré par la partie :
$$\mathcal{B}_F = \left(X^4 + X^2 + 1, X^4 - X^2, X^4 - 1\right)$$
On étudie l'indépendance linéaire des trois polynômes qui constituent $\mathcal{B}_F$:
$a\left(X^4 + X^2 + 1\right) + b\left(X^4 - X^2\right) + c\left(X^4 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)X^4 + (a-b)X^2 + (a-c) = 0$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a-b=0 \\ a-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b=a \\ c=a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0.$$
On en déduit que $\mathcal{B}_F$ est libre. Étant génératrice de F, c'en est une base. On conclut que :
$\boxed{F \text{est un sous-espace vectoriel de } E \text{ de base } \mathcal{B}_F = \left(X^4 + X^2 + 1, X^4 - X^2, X^4 - 1\right) \text{ et } \dim F = 3.}$

(b) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 \in E$.
$P \in G \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ P(-x) = -P(x)$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 = -a - bx - cx^2 - dx^3 - ex^4.$
Par unicité de la décomposition d'un polynôme dans la base $\mathcal{C}$, $P \in G \Leftrightarrow a = c = e = 0$.
Ainsi $G = \left\{P = bX + dX^3 \mid (b,d) \in \mathbf{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(X, X^3\right)$.
Donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$ et $\mathcal{B}_G = \left(X, X^3\right)$ en est une partie génératrice.
Comme les polynômes X et X^3 ne sont pas colinéaires, la partie $\mathcal{B}_G = \left(X, X^3\right)$ est libre.
On en conclut que $\boxed{\mathcal{B}_G = \left(X, X^3\right) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim G = 2.}$

(c) $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_G \cup \mathcal{B}_F = \left(X, X^3, X^4 + X^2 + 1, X^4 - X^2, X^4 - 1\right)$. On étudie le rang de cette famille.
Soit M la matrice associée à cette famille dans la base $\mathcal{C}$. On échelonne M :
$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0&0&1&0&-1 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&-1&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_4}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&-1&0 \\ 0&0&1&0&-1 \\ 0&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_3}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&-1&0 \\ 0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&2&1 \end{pmatrix} \underset{L_5 \leftarrow L_5 - 2L_4}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1}&0&0&0&0 \\ 0&\boxed{1}&0&0&0 \\ 0&0&\boxed{1}&-1&0 \\ 0&0&0&\boxed{1}&-1 \\ 0&0&0&0&\boxed{3} \end{pmatrix} = 5.$$
On en déduit que $\mathrm{rg}(\mathcal{B}_E) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_E) = \dim E = 5$ donc $\boxed{\mathcal{B}_E \text{ est une base de } E}$.

(d) Par définition d'une base :
$\forall P \in E,\ \exists!\,(a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5 \mid P = aX + bX^3 + c\left(X^4 + X^2 + 1\right) + d\left(X^4 - X^2\right) + e\left(X^4 - 1\right)$
Soit $P_1 = aX + bX^3$ et $P_2 = c\left(X^4 + X^2 + 1\right) + d\left(X^4 - X^2\right) + e\left(X^4 - 1\right)$.
On a alors $P_1 \in G$, $P_2 \in F$ et $P_1 + P_2 = P$. On a bien montré que $\boxed{\forall P \in E,\ \exists\,(P_1, P_2) \in G \times F \mid P = P_1 + P_2.}$

3. **Première méthode** : l'énoncé donne $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.
Donc $P \in H \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbf{R}_3[X] \mid P = (X-1)Q$.
Ainsi $H = \left\{P = (X-1)\left(aX^3 + bX^2 + cX + d\right) \mid (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4\right\}$
$= \left\{aX^3(X-1) + bX^2(X-1) + cX(X-1) + d(X-1) \mid (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4\right\}$
$= \mathrm{Vect}\left(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1), (X-1)\right)$.
On en déduit que H est le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille :
$$\mathcal{B}_H = \left(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1), (X-1)\right).$$
Comme les quatre polynômes qui constituent cette famille sont non nuls et de degrés deux à deux distincts, $\mathcal{B}_H$ est libre. On en conclut que :
$\boxed{H \text{ est un s-ev de } E, \text{ de base } \mathcal{B}_H = \left(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1), (X-1)\right) \text{ et de dimension 4.}}$

Deuxième méthode : Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4$, $(a,b,c,d,e) \in \mathbf{R}^5$.
$P \in H \Leftrightarrow P(1) = 0 \Leftrightarrow a+b+c+d+e = 0 \Leftrightarrow a = -(b+c+d+e)$.
On en déduit que $H = \left\{ b(X-1) + c\left(X^2-1\right) + d\left(X^3-1\right) + e\left(X^4-1\right) \mid (b,c,d,e) \in \mathbf{R}^4 \right\}$
c'est-à-dire $H = \mathrm{Vect}\left(X-1, X^2-1, X^3-1, X^4-1\right)$, donc $\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$
De plus, $\mathcal{B}'_H = \left(X-1, X^2-1, X^3-1, X^4-1\right)$ est une partie génératrice de H.
Comme $X-1$, X^2-1, X^3-1 et X^4-1 sont des polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, $\mathcal{B}'_H$ est libre.
On en conclut que : $\boxed{\mathcal{B}'_H = \left(X-1, X^2-1, X^3-1, X^4-1\right) \text{ est une base de } H \text{ et } \dim H = 4.}$

4. $G \cap H$ est l'intersection de 2 sous-espaces vectoriels de E, donc $\boxed{G \cap H \text{ est un s-ev de } E.}$
Soit $P \in E$. $P \in G \cap H \Leftrightarrow \begin{cases} P \in G \\ P \in H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mid P = aX + bX^3 \\ P(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = a\left(X - X^3\right)$.
On en déduit que $G \cap H = \mathrm{Vect}\left(X - X^3\right)$ donc $\boxed{\left(X - X^3\right) \text{ est une base de } G \cap H \text{ et } \dim(G \cap H) = 1.}$

5. (a) $T_1(1) = T_2(1) = T_3(1) = T_4(1) = 0$ et ils sont tous de degrés $\leqslant 4$, donc $\boxed{T_1, T_2, T_3, T_4 \in H.}$
(b) Comme les polynômes T_1, T_2, T_3 et T_4 sont de degrés deux à deux distincts et non nuls, (T_1, T_2, T_3, T_4) est une partie libre. De plus, $\mathrm{card}(T_1, T_2, T_3, T_4) = \dim H = 4$ donc $\boxed{\mathcal{B} = (T_1, T_2, T_3, T_4) \text{ est une base de } H.}$
(c) Soit $P = 2X^4 - 9X^3 + 17X^2 - 14X + 4$.
(i) On a $\deg(P) \leqslant 4$ et $P(1) = 0$ donc $\boxed{P \in H.}$
(ii) <u>Coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}_H$:</u>
on cherche $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ tels que : $P = a(X-1) + bX(X-1) + cX^2(X-1) + dX^3(X-1)$.
En développant le membre de droite, et par identification des coefficients, il vient :

$$\begin{cases} d = 2 \\ c - d = -9 \\ b - c = 17 \\ a - b = -14 \\ -a = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 10 \\ c = -7 \\ d = 2 \end{cases} \quad \text{donc } \boxed{P = -4(X-1) + 10X(X-1) - 7X^2(X-1) + 2X^3(X-1).}$$

<u>Coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}'_H$:</u> même méthode, et on trouve immédiatement

$$\boxed{P = -14(X-1) + 17(X^2-1) - 9(X^3-1) + 2(X^4-1).}$$

(iii) Pour décomposer P dans la base $\mathcal{B}$, on cherche $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ tels que $P = aT_1 + bT_2 + cT_3 + dT_4$.
Or si $P = a(X-1) + \frac{b}{2}(X-1)^2 + \frac{c}{6}(X-1)^3 + \frac{d}{24}(X-1)^4$ alors :

$$\begin{aligned} P' &= a + b(X-1) + \frac{c}{2}(X-1)^2 + \frac{d}{6}(X-1)^3 & &\text{donc } P'(1) = a, \\ P^{(2)} &= b + c(X-1) + \frac{d}{2}(X-1)^2 & &\text{donc } P^{(2)}(1) = b, \\ P^{(3)} &= c + d(X-1) & &\text{donc } P^{(3)}(1) = c \\ \text{et} \quad P^{(4)} &= d & &\text{donc } P^{(4)}(1) = d. \end{aligned}$$

Avec $P = 2X^4 - 9X^3 + 17X^2 - 14X + 4$, on obtient :

$$\begin{aligned} P' &= 8X^3 - 27X^2 + 34X - 14 & &\text{donc } a = P'(1) = 1 \\ P^{(2)} &= 24X^2 - 54X + 34 & &\text{donc } b = P^{(2)}(1) = 4 \\ P^{(3)} &= 48X - 54 & &\text{donc } c = P^{(3)}(1) = -6 \\ P^{(4)} &= 48 & &\text{donc } d = P^{(4)}(1) = 48 \end{aligned}$$

On en conclut que la matrice des coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 48 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 2 : Variables aléatoires à densité}}$

1. (a) Par définition de la fonction de répartition de Y : $\forall x \in \mathbf{R},\ F_Y(x) = \mathbf{P}(Y \leqslant x) = \mathbf{P}(|X| \leqslant x)$.

   On en déduit que : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+,\ F_Y(x) = 2\Phi(x) - 1.}$

   On pose alors $\forall x \in \mathbf{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 2\Phi(x) - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   $F_Y(0) = 0$ donc F_Y est continue en 0. Puisque Φ est continue sur $\mathbf{R}_+$, F_Y est continue sur $\mathbf{R}$.
   F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0. On en déduit que F_Y est la fonction de répartition d'une variable à densité. Comme $\forall x \in \mathbf{R},\ \Phi'(x) = \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, on conclut que Y est une variable à densité et

   $$\boxed{\text{une densité de } Y \text{ est définie par : } \forall x \in \mathbf{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

   (b) Par définition, Y admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)\, \mathrm{d}x$ est absolument convergente. Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x f_Y(x)|\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$ est généralisée en $+\infty$.

   Une primitive de $x \mapsto x e^{-\frac{x^2}{2}}$ est $K(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} K(x) = 0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x f_Y(x)|\, \mathrm{d}x$ converge

   et $\mathbf{E}(Y) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty}$ soit $\boxed{\mathbf{E}(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.}$

   (c) D'après le théorème de König-Huygens, Y admet une variance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Y(x)\, \mathrm{d}x$ est absolument convergente. Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x^2 f_Y(x)\right| \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$

   On sait que X admet un moment d'ordre 2 égal à $m_2(X) = \mathbf{V}(X) = 1$.

   De plus $m_2(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x = 2 \int_0^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, \mathrm{d}x$ par parité de la fonction $x \mapsto x^2 \varphi(x)$.

   On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Y(x)\, \mathrm{d}x$ est absolument convergente, que Y admet un moment d'ordre 2 et que $\mathbf{E}(Y^2) = 1$. Enfin, comme $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2$, $\boxed{Y \text{ admet une variance et } \mathbf{V}(Y) = \dfrac{\pi - 2}{\pi}}$.

2. (a) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{d}t$ est impropre en 0 et en $+\infty$. On pose $u = \sqrt{2t} = h(t)$ où h est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^\star$. On a alors : $t = \dfrac{u^2}{2}$ et $\mathrm{d}t = u\,\mathrm{d}u$.

   $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\, \mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{u\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} u\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \text{ converge.}$$

   Comme φ est une densité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$ converge et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$ aussi.

   Finalement, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u.}$

   (b) La fonction g est continue sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0, et positive sur $\mathbf{R}$.

   D'après **a.**, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente.

   De plus, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2\pi} = 1.$

   On en conclut que $\boxed{g \text{ est une densité.}}$

3. Soit Z de densité g, de fonction de répartition G et $T = \sqrt{2Z}$.

   (a) Comme une densité de Z est la fonction g, $Z(\Omega) = \mathbf{R}_+^\star$ donc $\boxed{T(\Omega) = \mathbf{R}_+^\star.}$

   On a alors $\forall t > 0,\ \mathbf{P}(T \leqslant t) = \mathbf{P}\left(\sqrt{2Z} \leqslant t\right) = \mathbf{P}\left(Z \leqslant \dfrac{t^2}{2}\right) = G\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

On pose alors $\forall t \in \mathbf{R},\ F_T(t) = \begin{cases} G\left(\dfrac{t^2}{2}\right) & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$G(0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(u)\ \mathrm{d}u = 0$ donc F_T est continue en 0. Puisque G est continue sur $\mathbf{R}$, F_T est continue sur $\mathbf{R}$. De plus, F_T est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en 0. On en déduit que F_T est la fonction de répartition d'une variable à densité et une densité de T est définie par : $\forall t \in \mathbf{R},\ f_T(t) = \begin{cases} t \times g\left(\dfrac{t^2}{2}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$

Comme $\forall t > 0,\ t \times g\left(\dfrac{t^2}{2}\right) = \dfrac{t}{\sqrt{\pi \frac{t^2}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$,

$\boxed{\text{une densité } f_T \text{ de } T \text{ est définie par : } \forall t \in \mathbf{R},\ f_T(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}}$

Comme $\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $\forall t \in \mathbf{R},\ f_T(t) = f_Y(t)$ et $\boxed{T \text{ suit la même loi que } Y.}$

(b) D'après **1c.**, Y possède un moment d'ordre 2 et $\mathbf{E}\left(Y^2\right) = 1$.
Comme T suit la même loi que Y, T possède un moment d'ordre 2 et $\mathbf{E}\left(T^2\right) = 1$.
De plus, $Z = \dfrac{T^2}{2}$ donc, par linéarité de l'espérance, $\boxed{Z \text{ possède une espérance et } \mathbf{E}(Z) = \dfrac{1}{2}\mathbf{E}\left(T^2\right) = \dfrac{1}{2}.}$

4. Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que Z.

(a) Soit $x > 0$. L'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-t)}}$ est impropre en 0 et en x.

La fonction $u \mapsto x\sin^2 u$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on peut donc poser le changement de variable $t = x\sin^2 u$ d'où $\mathrm{d}t = 2x\sin u\cos u\ \mathrm{d}u$ et $\begin{cases} u = 0 \Rightarrow t = 0 \\ u = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = x \end{cases}$

On a alors $I(x)$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2x\sin u\cos u}{\sqrt{x\sin^2 u\left(x - x\sin^2 u\right)}}\mathrm{d}u$ est convergente.

Or $\forall u \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sqrt{x\sin^2 u\left(x - x\sin^2 u\right)} = x\sin u\cos u$ car $x > 0$ et $\sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = \cos u$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2x\sin u\cos u}{\sqrt{x\sin^2 u\left(x - x\sin^2 u\right)}}\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} 2\ \mathrm{d}u$. Cette dernière intégrale étant faussement impropre, on en conclut que : $\boxed{\text{l'intégrale } I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-t)}} \text{ est convergente et } I(x) = \pi.}$

(b) Comme Z_1 et Z_2 sont deux variables à densité indépendantes de même densité g, d'après le rappel de l'énoncé, $Z_1 + Z_2$ est une variable à densité dont une densité est définie par :
$\forall x \in \mathbf{R},\ f_{Z_1+Z_2}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,g(x-t)\ \mathrm{d}t$. Or $g(t)\,g(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ x - t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < x$.
Si $x \leqslant 0$ alors $\forall t \in \mathbf{R},\ g(t)\,g(x-t) = 0$ donc $f_{Z_1+Z_2}(x) = 0$.
Si $x > 0$ alors $f_{Z_1+Z_2}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-(x-t)}}{\sqrt{\pi(x-t)}}\ \mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{\pi}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(x-t)}} = \frac{e^{-x}}{\pi} I(x)$.

D'après **a.**, on conclut qu'une densité de $Z_1 + Z_2$ est définie par : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R},\ f_{Z_1+Z_2}(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$

(c) On reconnait la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1,
donc $\boxed{Z_1 + Z_2 \text{ admet une espérance et } \mathbf{E}(Z_1 + Z_2) = 1.}$

On aurait pu utiliser la linéarité de l'espérance : Z_1 et Z_2 admettent une espérance égale à $\mathbf{E}(Z) = \dfrac{1}{2}$ d'après **3b.** donc $Z_1 + Z_2$ admet une espérance et $\mathbf{E}(Z_1 + Z_2) = \mathbf{E}(Z_1) + \mathbf{E}(Z_2) = 1$.